

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E ESTRUTURAS**

FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

Prof. Sergio Hampshire de Carvalho Santos

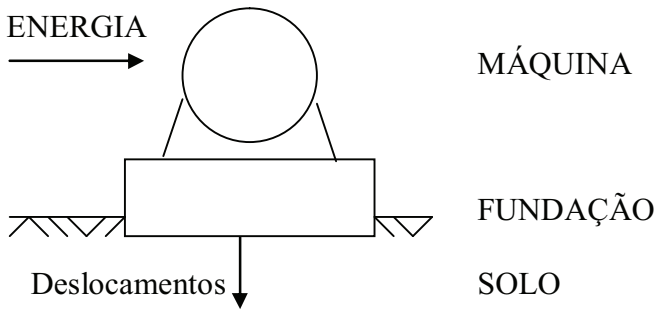
1.	MODELAGEM DAS FUNDAÇÕES E SUPERESTRUTURAS	3
-	Definição Conceitual da Solução: Fundações em Bloco e em Pórtico	
-	Modelagem Matemática em Elementos Finitos. Equações de Movimento	
-	Modelagem Matemática com Sistemas de Um Grau de Liberdade	
-	Modelagem Matemática com Sistemas de Vários Graus de Liberdade.	
2.	MODELAGEM DO SUBSOLO	23
-	Avaliação das Propriedades Mecânicas dos Solos	
-	Propagação Tridimensional de Ondas nos Solos	
3.	ANÁLISE DE FUNDAÇÕES DIRETAS E SOBRE ESTACAS	38
-	Fundações Diretas Sobre Solo Homogêneo	
-	Fundações Parcialmente Enterradas no Solo	
-	Fundações Diretas Sobre Solo Estratificado Horizontalmente	
-	Fundações sobre Estacas. Estacas Isoladas e Consideração do Efeito de Grupo	
-	Análise Automatizada	
4.	CRITÉRIOS DE PROJETO	69
-	Classificação das Fundações	
-	Definição das Cargas Dinâmicas a Serem Consideradas	
-	Verificação das Tolerâncias de Deslocamentos	
-	Verificação das Tensões no Solo	
-	Detalhamento dos Elementos Estruturais. Requisitos de Projeto	
-	Exemplos de Projeto	
5.	ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES	90
-	Isolamento Ativo e Passivo. Isolamento à Distância. Isolamento por Barreiras	
-	Propriedades dos Materiais Isolantes. Dispositivos Mecânicos Comerciais.	
6.	BIBLIOGRAFIA	95

1. MODELAGEM DAS FUNDAÇÕES E SUPERESTRUTURAS

1.1 Definição Conceitual da Solução: Fundações em Bloco e em Pórtico

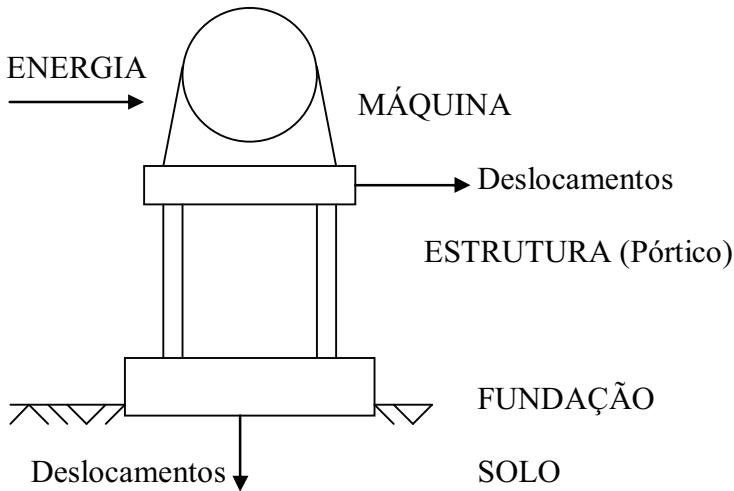
A definição conceitual da solução depende da geometria da máquina, da frequência de operação e das características do subsolo. Objetiva-se, conceitualmente, afastar as frequências de operação das frequências próprias.

1.1.1 - Interação Máquina x Fundação x Solo



FUNDAÇÃO EM BLOCO

1.1.2 - Interação Máquina x Estrutura x Fundação x Solo



FUNDAÇÃO EM PÓRTICO

1.1.3 - Unidades SI:

Unidades compatíveis: m, t (Mg), kN (=1 Mg x 1m/s²).

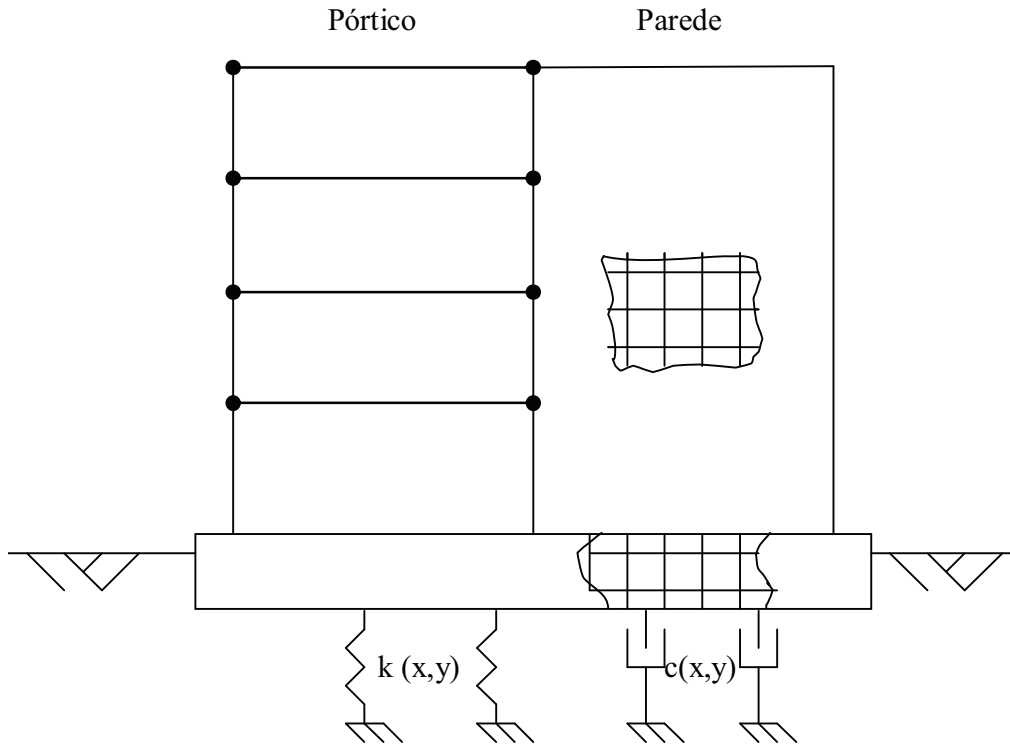
1.1.4 - Sistemas de eixos:

Recomenda-se um sistema ortogonal, com Z positivo apontado para baixo.

1.2 Modelagem Matemática em Elementos Finitos. Equações de Movimento

1.2.1 - Esquema de uma Modelagem Geral

A modelagem usual aplica o Método dos Elementos Finitos (na notação a ser empregada, matrizes e vetores serão indicados em negrito). Duas possibilidades de se modelar o bloco ou laje de fundação, a serem analisadas caso a caso, em função da rigidez dos elementos estruturais, são como Bloco Rígido (com seis graus de liberdade) ou através de uma malha em Elementos Finitos.



1.2.2 – Sistema de Equações de Movimento

Em forma matricial:

$$\mathbf{M} \mathbf{u}''(t) + \mathbf{C} \mathbf{u}'(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad \text{onde} \quad \mathbf{u}''(t) = \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}'(t) = \frac{d \mathbf{u}}{dt}$$

Onde:

\mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} - matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, do sistema

\mathbf{u}'' , \mathbf{u}' , \mathbf{u} - vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos nos graus de liberdade

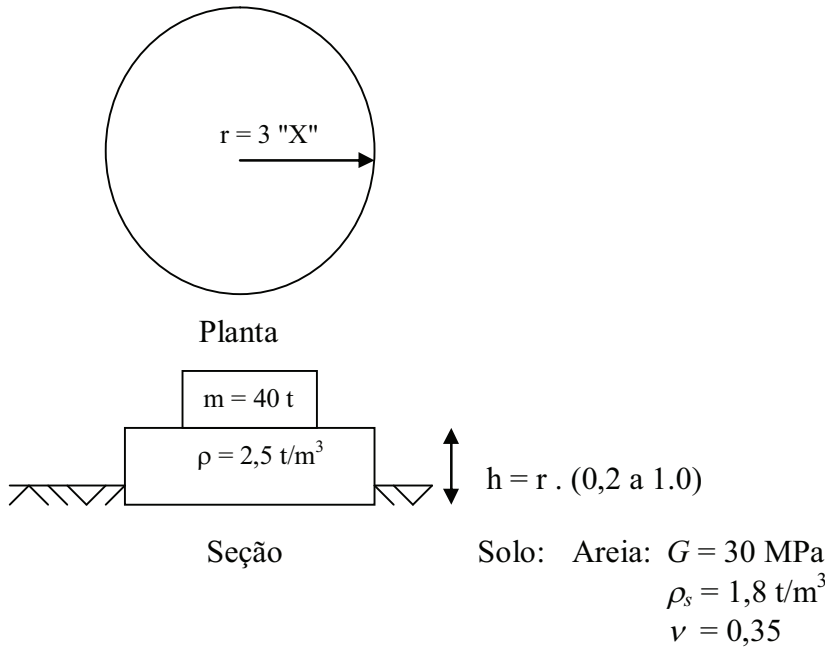
\mathbf{F} - vetor de forças aplicadas nos graus de liberdade

As análises dinâmicas são automatizadas através dos diversos programas comerciais disponíveis, como o sistemas SALT, GTSTRUDL ou SAP2000.

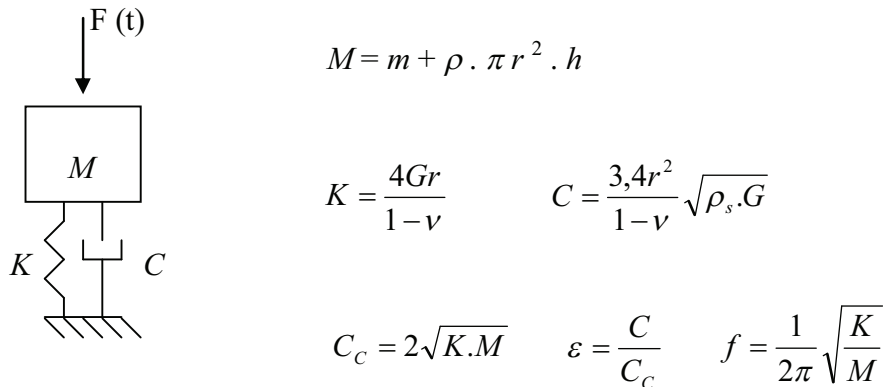
1.3 Modelagem Matemática com Sistemas de Um Grau de Liberdade

1.3.1- Exemplo de um Problema Físico de um Grau de Liberdade (Fundação em Bloco)

Para o estudo da aplicação da teoria da Dinâmica Estrutural a problemas físicos de um grau de liberdade, é escolhida como exemplo uma situação típica em Fundações de Máquinas, um bloco rígido com vibração no sentido vertical (eixo Z):



1.3.2 - Parâmetros do Problema Dinâmico



Várias dimensões para o bloco são analisadas na tabela abaixo:

Exemplo	X	r(m)	h/r	M(t)	K(kN/m)	C(kN.s/m)	ξ	f(Hz)
1	1,0	3,0	0,2	82	553846	10940	0,81	13,0
2	1,0	3,0	0,5	146	553846	10940	0,61	9,8
3	1,0	3,0	1,0	252	553846	10940	0,46	7,5
4	2,0	6,0	0,2	379	1107692	43759	1,07	8,6
5	2,0	6,0	0,5	888	1107692	43759	0,70	5,6
6	2,0	6,0	1,0	1736	1107692	43759	0,50	4,0

1.3.3 - Equação de movimento

$$F_I(t) + F_C(t) + F_S = F(t)$$

$$M u''(t) + C u'(t) + K u(t) = F(t) \quad \text{onde} \quad u''(t) = \frac{d^2u}{dt^2} \quad \text{e} \quad u'(t) = \frac{du}{dt}$$

Para se analisar a influência das cargas de caráter estático no problema dinâmico, é estudado um problema de um grau de liberdade no sentido vertical. É criada a variável:

$$u_t(t) = u(t) + u_{st},$$

onde $u_t(t)$ são os deslocamentos totais variando no tempo e $u(t)$ e u_{st} são os deslocamentos provocados pelas forças de caráter dinâmico e gravitacional, respectivamente.

u_{st} corresponde à deformada pela ação do peso $W = M g$

$$\text{ou } u_t(t) = u(t) + u_{st} = u(t) + \frac{M \cdot g}{K}$$

Aplicando-se a equação de movimento acima definida, na variável $u_t(t)$ tem-se:

$$M u''(t) + C u'(t) + K [u(t) + u_{st}] = F(t) + W \quad \text{ou}$$

$$M u''(t) + C u'(t) + K u(t) = F(t)$$

Depreende-se que os efeitos das cargas gravitacionais devem ser calculados independentemente das cargas dinâmicas, devendo-se, posteriormente superpor os efeitos dos dois tipos de cargas.

A fórmula abaixo é bastante útil:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{u_{st}}{g}} \quad \text{Exemplo: } u_{st} = 0,25\text{m}, T = 1 \text{ seg}$$

- Deslocamentos impostos ao apoio

$$u_{ABS} = u_{REL} + u_{APOIO}$$

$$M u''_{ABS}(t) + C u'_{REL}(t) + K u_{REL}(t) = 0$$

$$M u''_{REL}(t) + C u'_{REL}(t) + K u_{REL}(t) = -M u''_{APOIO}(t)$$

- Associações de molas

Nas molas em paralelo, ao se impor um deslocamento u , este é igual para as duas molas e a força total é igual a:

$$F = u (K_1 + K_2)$$

Nas molas em série, a força aplicada é a mesma para as duas molas, e o deslocamento total é:

$$u = u_1 + u_2 = F / K_1 + F / K_2 \quad \text{ou:}$$

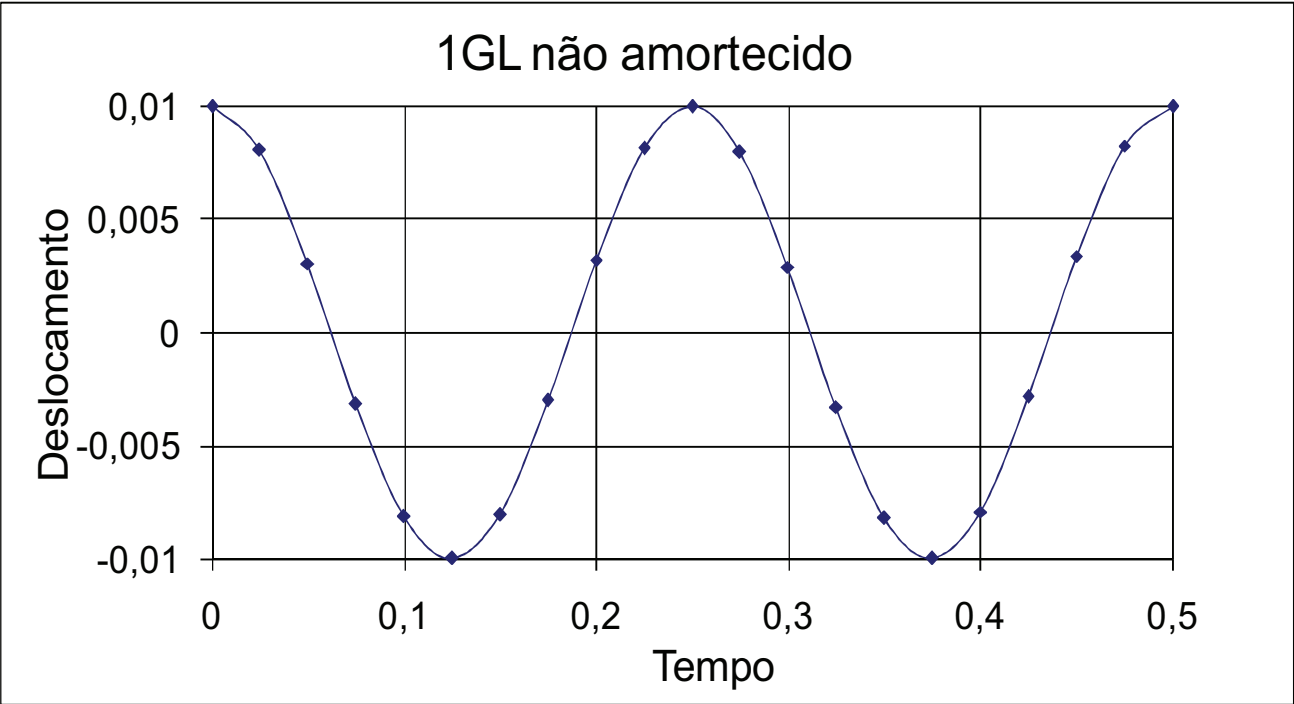
$$F = u \cdot \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

1.3.4 - Vibrações livres não amortecidas ($C=0$, $F(t) = 0$)

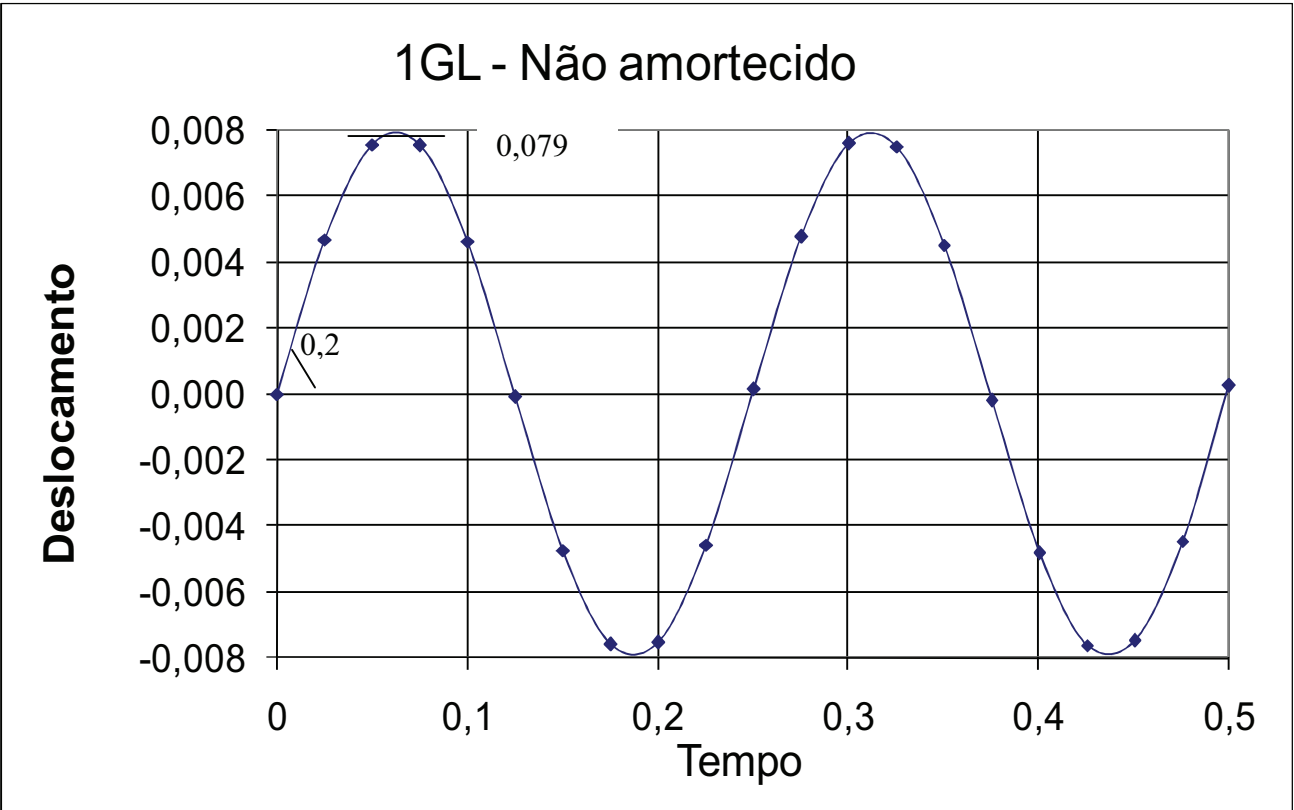
$$u(t) = u(0) \cos \omega t + u'(0)/\omega \sin \omega t \quad \text{onde } \omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

- No Exemplo 6 definido anteriormente, com $C=0$, $u(0) = 0,01\text{m}$ e $u'(0) = 0$:

$$u(t) = 0,01 \cos 25,2 t \quad (\omega = 25,2 \text{ rad/s}; T = 0,25\text{s})$$

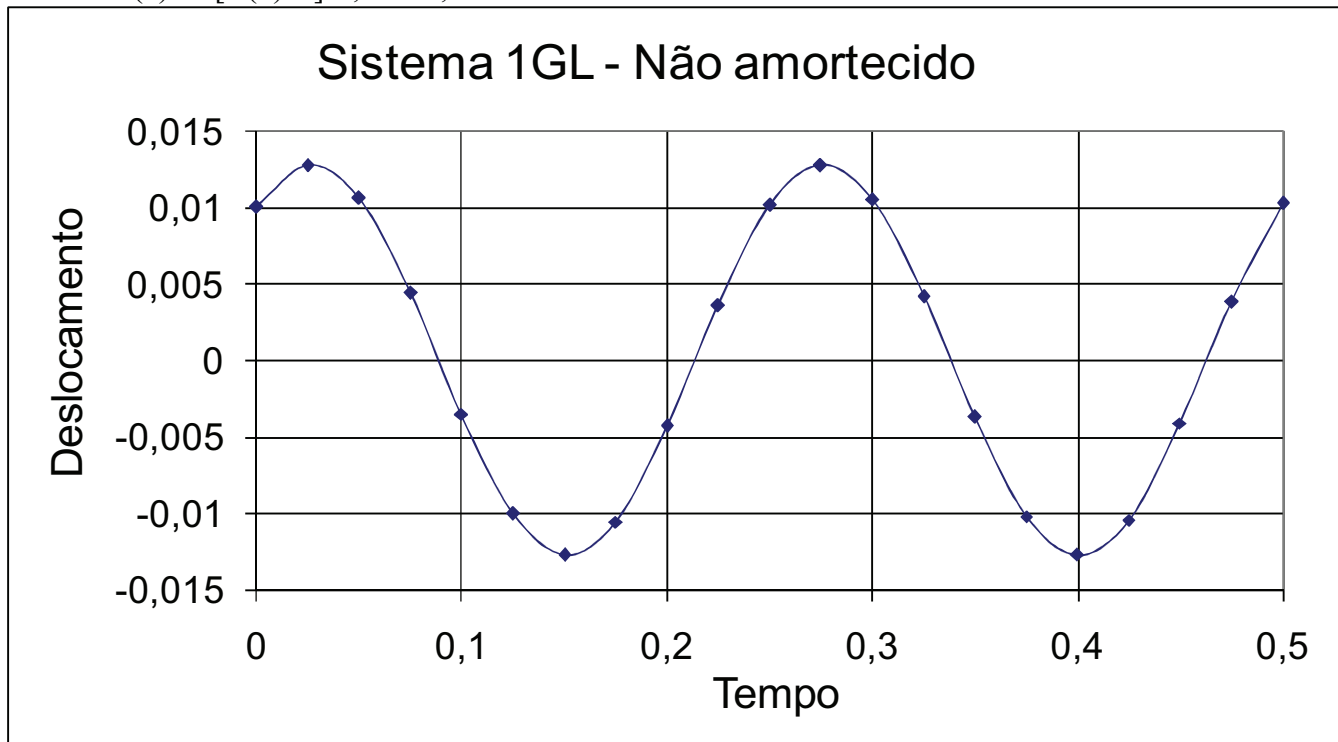


- No Exemplo 6, com $C=0$, $u(0) = 0$ e $u'(0) = 0,2$ m/s:
 $u(t) = 0,2/25,2 \text{ sen } 25,2 t$



- Amplitude do movimento (somando-se os dois casos anteriores)

$$C^2 = u(0)^2 + [u'(0)/\omega]^2 ; C = 0,0128\text{m}$$



1.3.5 - Vibrações livres amortecidas (F(t)=0)

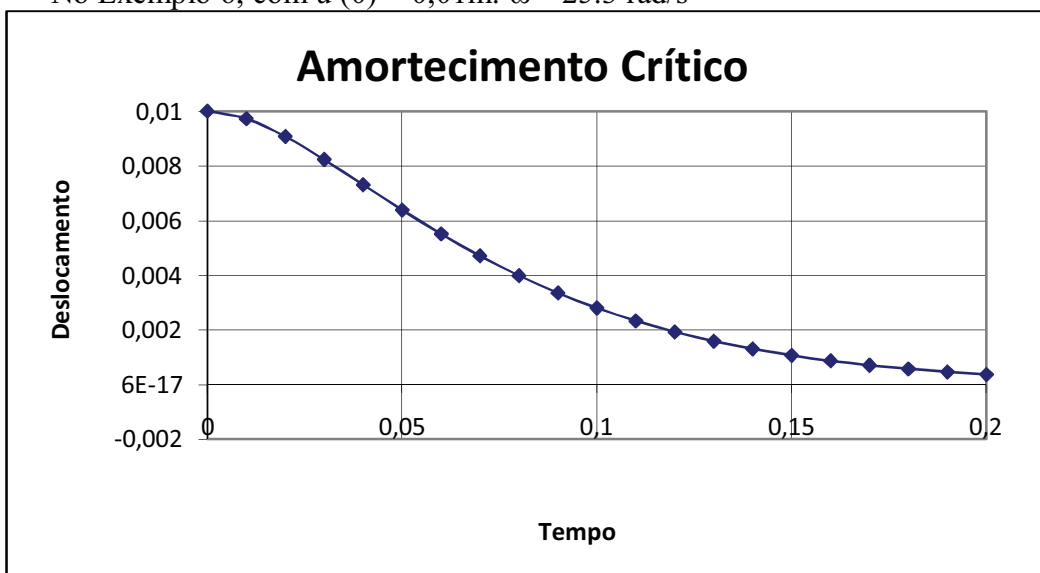
$$M u''(t) + C u'(t) + K u(t) = 0$$

$$C_c = 2\sqrt{K.M} \quad \varepsilon = \frac{C}{C_c} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

- Sistema com amortecimento crítico:

$$u(t) = e^{-\omega t} [u(0) (1 + \omega t) + u'(0) t]$$

No Exemplo 6, com $u(0) = 0,01\text{m}$: $\omega = 25.3 \text{ rad/s}$



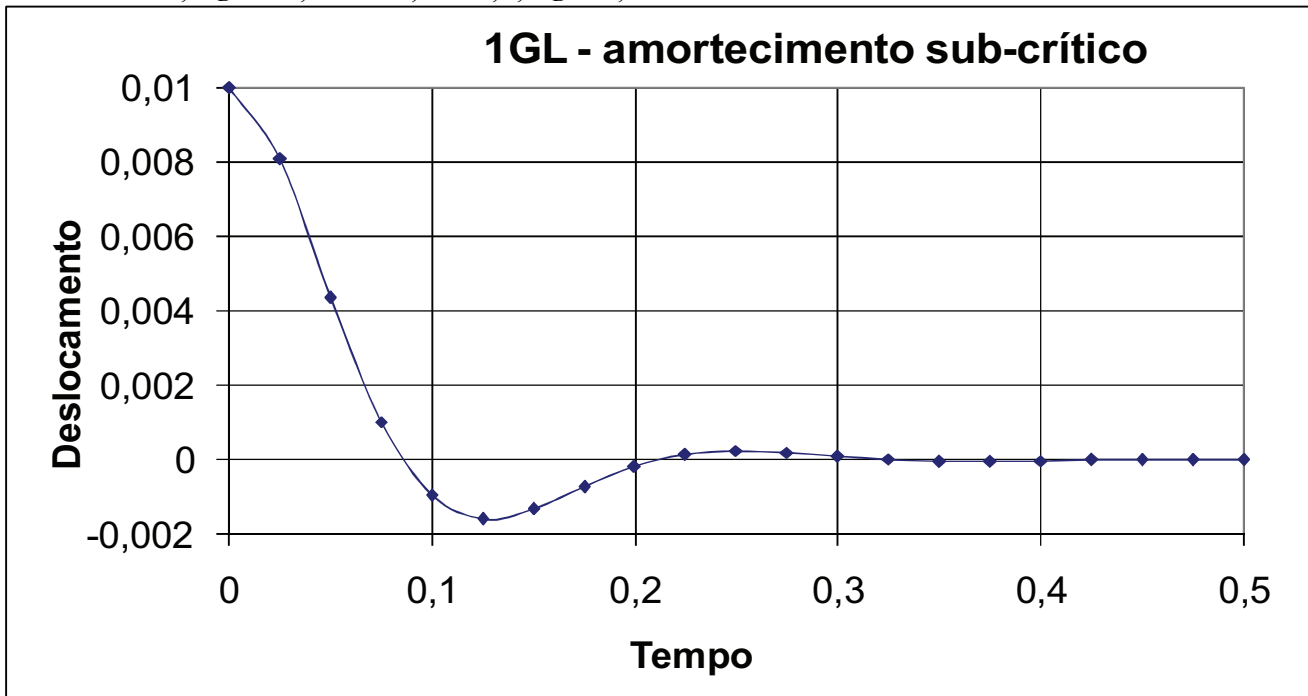
- Sistema sub-amortecido:

$$u(t) = e^{-\varepsilon \omega t} \left(u(0) \cos \omega_D t + \frac{u'(0) + u(0) \varepsilon \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t \right)$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} = \omega \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

No Exemplo 6, com $u(0) = 0,01\text{m}$:

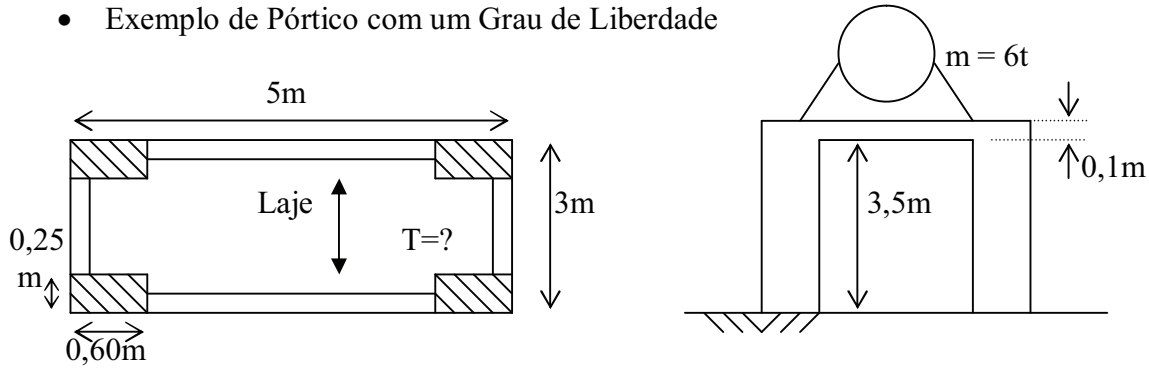
$$\omega = 25,3 \text{ rad/s}; \omega_D = 21,90 \text{ rad/s}; \varepsilon = 0,5; T_D = 0,287\text{s}$$



- Sistema super-amortecido ($\varepsilon > 1$)

$$u(t) = e^{-\varepsilon \omega t} [A \sinh(\omega_{DD} t) + B \cosh(\omega_{DD} t)] \quad \omega_{DD} = \omega \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

- Exemplo de Pórtico com um Grau de Liberdade



PLANTA

SEÇÃO

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,60 \times 0,25^3}{12} = 7,81 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E = 3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$K = 4k = 4 \times 12 \frac{EI}{L^3} = 4 \times \frac{12 \times 3 \times 10^7 \times 7,81 \times 10^{-4}}{3,5^3} = 26239 \text{ kN/m}$$

$$M = 3 \times 5 \times 0,1 \times 2,5 \text{ t/m}^3 + 6 = 9,75 \text{ t}$$

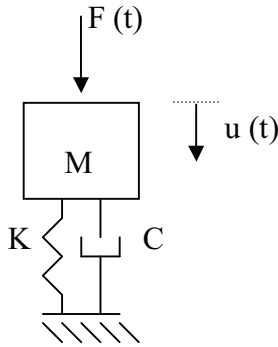
$$\omega = 51,9 \text{ rad/s}; f = 8,26 \text{ Hz}; T = 0,12 \text{ s}$$

T pode ser avaliado como $T = 0,1 N$ (N- número de pavimentos), ou

$T = 0,0466 (h_n)^{0,90}$ (pórtico de concreto, com altura total igual a h_n , de acordo com a NBR 15421 - Norma Brasileira de Projeto de Estruturas Resistentes a Sismos): $T = 0,144\text{s}$

1.3.6 - Carga Harmônica

Usando a notação complexa:



$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = C_A e^{i\omega t} + C_B e^{-i\omega t} \quad (\text{solução da homogênea ou permanente})$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t) = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

$$C_A = C_1 + i D_1; C_B = C_2 + i D_2$$

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = C_A e^{i\omega t} + C_B e^{-i\omega t} =$$

$$= (C_1 + i D_1) (\cos \omega t + i \sin \omega t) + (C_2 + i D_2) (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

$$= (C_1 + C_2) \cos \omega t - (D_1 - D_2) \sin \omega t + i [(C_1 - C_2) \sin \omega t + (D_1 + D_2) \cos \omega t]$$

$$C_1 = C_2 = C; D_1 = -D_2 = D \quad (\text{o que anula os termos imaginários})$$

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = (C + i D) e^{i\omega t} + (C - i D) e^{-i\omega t}$$

$$2C = A; -2D = B$$

$$C = A/2; D = -B/2$$

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = \frac{(A - iB)e^{i\omega t}}{2} + \frac{(A + iB)e^{-i\omega t}}{2}$$

$$F(t) = F_0 \cos \omega t = \frac{F_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (B=0)$$

Parcela em $e^{i\omega t}$:

$$M u''(t) + C u'(t) + K u(t) = \frac{F_0}{2} e^{i\omega t}$$

$$U = (U_1 + i U_2) e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 M + i \omega C + K) (U_1 + i U_2) e^{i\omega t} = \frac{F_0}{2} e^{i\omega t}$$

$$(U_1 + i U_2) = \frac{F_0/2}{(-\omega^2 M + i \omega C + K)} = \frac{F_0/2}{K_1 + i K_2} \quad (K_1 = K - \omega^2 M ; K_2 = \omega C)$$

$$K_1 U_1 - K_2 U_2 + i(K_1 U_2 + K_2 U_1) = \frac{F_0}{2}$$

$$K_1 U_1 - K_2 U_2 = \frac{F_0}{2}$$

$$K_1 U_2 + K_2 U_1 = 0$$

$$U_2 = -K_2 U_1 / K_1$$

$$K_1 U_1 + K_2^2 U_1 / K_1 = \frac{F_0}{2}$$

$$U_1 (K_1^2 + K_2^2) = \frac{K_1 F_0}{2}$$

$$U_1 = \frac{K_1 F_0}{2(K_1^2 + K_2^2)}$$

$$U_2 = \frac{-K_2 F_0}{2(K_1^2 + K_2^2)}$$

Parcela em $e^{-i\omega t}$:

$$M u''(t) + C u'(t) + K u(t) = \frac{F_0}{2} e^{-i\omega t}$$

$$U = (U_1 + i U_2) e^{-i\omega t}$$

$$(-\omega^2 M - i \omega C + K) (U_1 + i U_2) e^{-i\omega t} = \frac{F_0}{2} e^{-i\omega t}$$

$$(U_1 + i U_2) = \frac{F_0/2}{(-\omega^2 M - i \omega C + K)} = \frac{F_0/2}{K_1 - i K_2}$$

$$K_1 U_1 - K_2 U_2 + i(K_1 U_2 - K_2 U_1) = \frac{F_0}{2}$$

$$K_1 U_1 + K_2 U_2 = \frac{F_0}{2}$$

$$K_1 U_2 - K_2 U_1 = 0$$

$$U_2 = K_2 U_1 / K_1$$

$$K_1 U_1 + K_2^2 U_1 / K_1 = \frac{F_0}{2}$$

$$U_1 (K_1^2 + K_2^2) = \frac{K_1 F_0}{2}$$

$$U_1 = \frac{K_1 \cdot F_0}{2 \cdot (K_1^2 + K_2^2)}$$

$$U_2 = \frac{K_2 \cdot F_0}{2 \cdot (K_1^2 + K_2^2)}$$

- Solução final em termos de deslocamentos

$$u(t) = F_0 \cdot \frac{K_1 \cdot \cos \varpi t + K_2 \cdot \sin \varpi t}{K_1^2 + K_2^2}; \quad K_1 = -\varpi^2 M + K; \quad K_2 = \varpi C; \quad \text{ou } u(t) = u_0 \cdot e^{i\varpi t} = \frac{F_0 \cdot e^{i\varpi t}}{-\varpi^2 \cdot M + i\varpi \cdot C + K}$$

Basta se resolver para a primeira parcela em $e^{i\varpi t}$ e as amplitudes em $\cos \varpi t$ e $\sin \varpi t$ correspondem às partes real e imaginária da resposta obtida, respectivamente.

Amplitude do deslocamento:

$$|u| = \frac{F_0 \cdot e^{i\varpi t}}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} \quad K_1 = -\varpi^2 M + K \quad K_2 = \varpi C$$

Adimensionalizando com relação ao deslocamento estático $u_{ST} = F_0 / K$

$$D = \frac{u}{u_{ST}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2}} \quad \beta = \varpi / \omega$$

A amplificação em termos de acelerações é β^2 vezes maior. Na ressonância:

$$D(\beta=1) = 1/2\xi$$

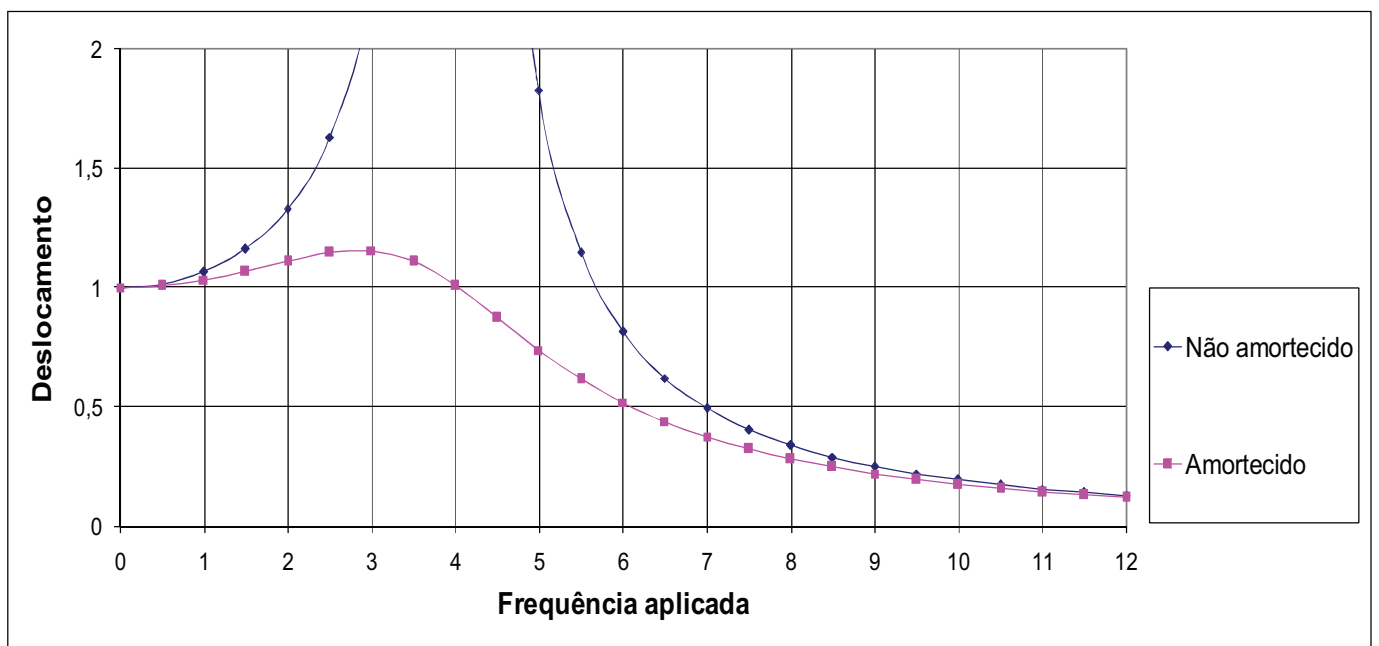
O máximo valor da amplificação D_{MAX} ocorre na frequência circular ϖ_{MAX} :

$$\varpi_{MAX} = \omega \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad D_{MAX} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Para o Exemplo 6 definido acima, apresenta-se na figura a seguir o estudo da amplificação, com $\xi = 0,5$. Neste mesmo exemplo, para a análise de um motor elétrico, operando a 600 rpm (10 Hz), com força dinâmica de módulo igual a 40 kN, temos:

$$\beta = 10,0/4,0 = 2,5 \quad D = 0,172 \quad \varpi_{MAX} = \omega \cdot 0,707; \quad D_{MAX} = 1,154$$

$$u = \frac{D \cdot F_0}{K} = 6,21 \mu m \quad (\text{OK, ISO 2372})$$



- Estudo da resposta na ressonância

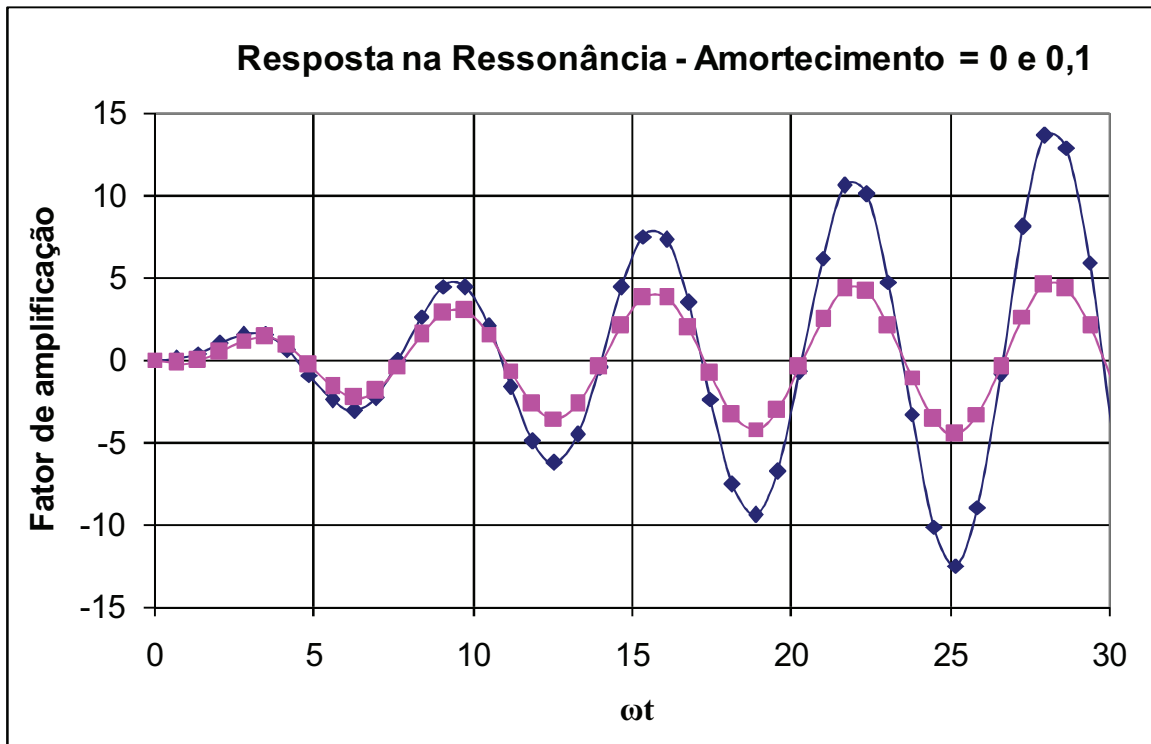
A amplificação na ressonância ($\beta=1$), deve ser estudada a partir do tempo $t=0$, considerando-se as parcelas particular e homogênea da equação diferencial de movimento.

No caso não amortecido, o fator de amplificação da resposta é:

$$R(t) = u(t) \cdot \frac{K}{F_0} = \frac{1}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$$

No caso amortecido, o fator de amplificação da resposta é aproximadamente:

$$R(t) = u(t) \cdot \frac{K}{F_0} = \frac{1}{2\varepsilon} (e^{-\varepsilon\omega t} - 1) \cos \omega t$$



As figuras anteriores mostram, respectivamente, os fatores de amplificação para o caso não amortecido e para o caso amortecido (com $\varepsilon=0,1$). Observar nas figuras que no caso não amortecido a distância entre dois picos é sempre igual a 2π e no caso amortecido, o fator de amplificação tende para:

$$D(\beta=1) = 1/2\varepsilon = 5$$

1.3.7 - Cargas de Impacto

$$M u''(t) + C u'(t) + K u(t) = F(t)$$

A carga $F(t)$ é de curta duração, relativamente ao período próprio T da estrutura ($t_0 \ll T$).
Corresponde à aplicação de um impulso à estrutura, traduzido pela resposta de um sistema de 1 grau de liberdade a uma velocidade imposta em $t=0$:

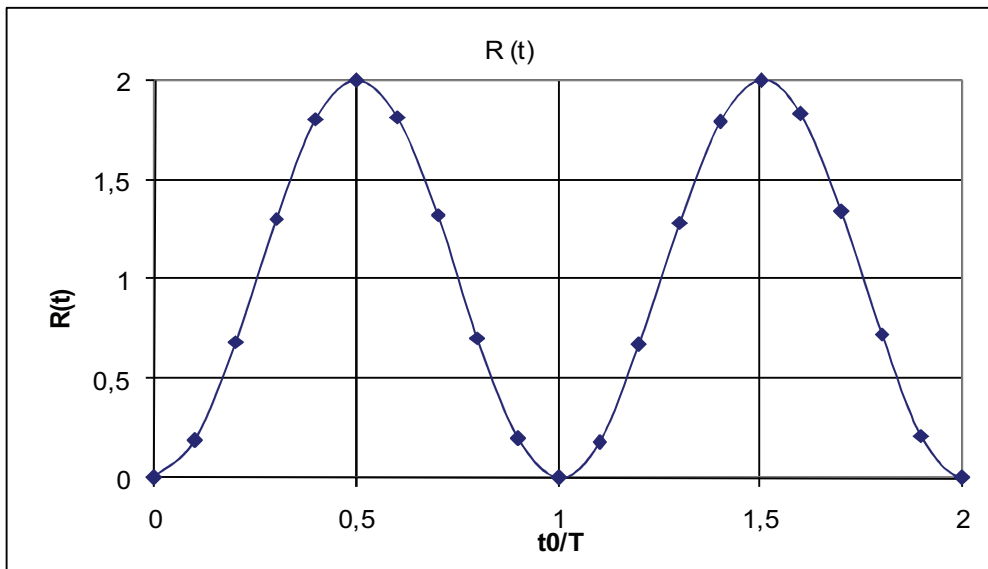
$$I = \int_0^{t_0} F(t) \cdot dt, \quad u(t) = \frac{u'(0)}{\omega} \sin \omega t = \frac{I}{M\omega} \sin \omega t$$

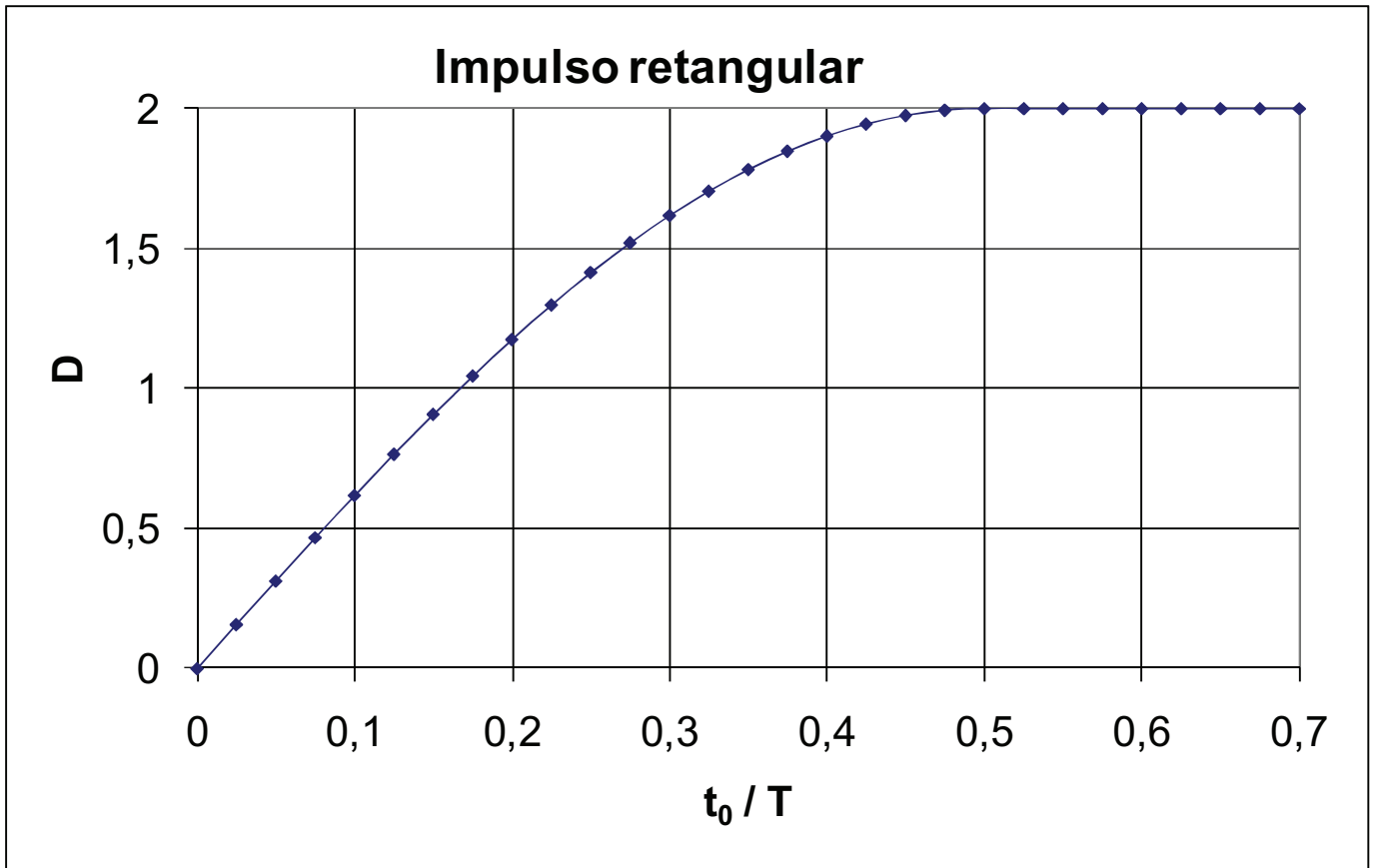
• Exemplo:
$$D = \frac{u_{MAX}}{u_{ESTÁTICO}}$$

Impulso retangular:
$$D = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi t_0}{T} \quad \left(\frac{t_0}{T} \leq \frac{1}{2} \right)$$

$$D = 2 \quad \left(\frac{t_0}{T} > \frac{1}{2} \right)$$

Na figura a seguir mostra-se o fator de resposta para um sistema com $D \geq 2$.





Para t_0 / T até cerca de 0,2, tem-se aproximadamente:

$$u(t)_{\text{MAX}} = \frac{I}{M \cdot \omega} \quad D = \frac{u_{\text{MAX}}}{u_{\text{ESTÁTICO}}} = \frac{\int F_0 \cdot t_0}{\frac{F_0}{K}} = \frac{K \cdot t_0}{M \cdot \omega} = \omega \cdot t_0 = \frac{2\pi \cdot t_0}{T} \cong 2 \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot t_0}{T} \quad (t_0 / T \leq 0,2)$$

Ver outros espectros no Clough, pg. 80.

1.3.9 - Carregamento dinâmico geral

Pode ser considerada a solução para carregamentos linearizados (trapezoidais), conforme, por exemplo, Mário Paz, item 4.4.1, pg. 112, ou Chopra, pg.158.

1.4 Modelagem Matemática com Sistemas de Vários Graus de Liberdade

1.4.1 - Resposta em vibrações livres não amortecidas ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$; $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{M} \mathbf{u}''(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$$

Sendo a solução da forma:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_N \text{ sen } (\omega t + \theta)$$

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{u}_N = \mathbf{0}$$

Soluções não identicamente nulas ($\mathbf{u}_N \neq \mathbf{0}$) existem somente se:

$$\det [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad \text{ou:}$$

$$\det \begin{vmatrix} K_{11} - \omega^2 M_{11} & K_{12} - \omega^2 M_{12} & \dots & K_{1N} - \omega^2 M_{1N} \\ K_{21} - \omega^2 M_{21} & K_{22} - \omega^2 M_{22} & \dots & K_{2N} - \omega^2 M_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} - \omega^2 M_{N1} & K_{N2} - \omega^2 M_{N2} & \dots & K_{NN} - \omega^2 M_{NN} \end{vmatrix} = 0$$

A expansão do determinante fornece uma equação de grau N, fornecendo N raízes para ω^2 , que correspondem às frequências circulares de vibração do sistema ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$).

$$f_i = \frac{1}{T_i} = \frac{\omega_i}{2\pi}$$

Para cada frequência própria i são obtidas as formas modais correspondentes por substituição dos ω_i no sistema de equações:

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \mathbf{u}_{Ni} = \mathbf{0}$$

Como o sistema de equações é homogêneo, as soluções são indeterminadas. São obtidas "formas modais", ou seja, relações entre os deslocamentos. Pode-se arbitrar, por exemplo, que o primeiro deslocamento em cada modo é:

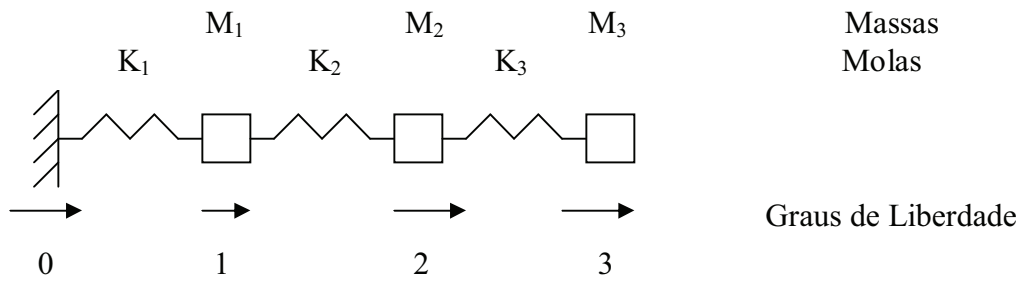
$$u_{N1i} = 1$$

Decorre que:

$$\mathbf{u}_{Ni} = [1 \quad u_{N2i} \quad u_{N3i} \quad \dots \quad u_{Nni}]$$

- Exemplo de montagem das matrizes:

Seja o sistema abaixo, de massas e molas:



Matriz de Rigidez Local:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{K} \end{pmatrix}$$

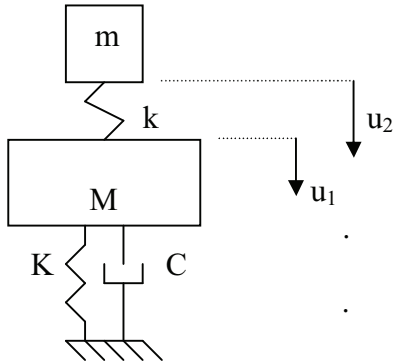
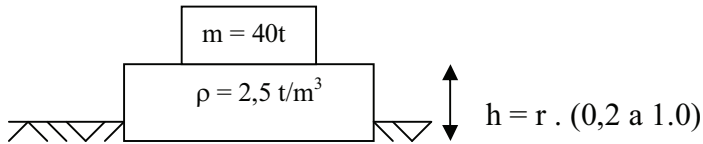
Matriz de Rigidez Global:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 & -\mathbf{K}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 & -\mathbf{K}_3 \\ 0 & 0 & -\mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_3 \end{pmatrix}$$

Matriz de Massa:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_3 \end{pmatrix}$$

- Exemplo: Bloco Rígido com máquina montada sobre amortecedores



Considerando-se os dados do Exemplo 3:

$M = 212t$; $m = 40t$; $K = 553.846 \text{ kN/m}$; $C = 0$ (adotado); $k = 100.000 \text{ kN/m}$

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} 653846 & -100000 \\ -100000 & 100000 \end{vmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 212 & 0 \\ 0 & 40 \end{vmatrix} \quad \det \begin{vmatrix} 653846 - 212\omega^2 & -100000 \\ -100000 & 100000 - 40\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(653846 - 212\omega^2)(100000 - 40\omega^2) - (-100000)(-100000) = 0$$

$$8.480 \omega^4 - 47.353.840 \omega^2 + 55.384.600.000 = 0$$

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \mathbf{u}_{Ni} = \mathbf{0}$$

$$\omega_1^2 = 1668; \omega_1 = 40,8 \text{ rad/s}; f_1 = 6,5 \text{ Hz}$$

$$\mathbf{u}_{N1} = [300230 \quad -100000] \cdot [1 \quad u_{N21}]^T = 0 \quad \mathbf{u}_{N1} = [1 \quad 3,00]$$

$$\omega_2^2 = 3916; \omega_2 = 62,6 \text{ rad/s}; f_1 = 9,95 \text{ Hz}$$

$$\mathbf{u}_{N1} = [-176346 \quad -100000] \cdot [1 \quad u_{N22}]^T = 0 \quad \mathbf{u}_{N2} = [1 \quad -1,76]$$

(A frequência do sistema não isolado era de $f = 7,5 \text{ Hz}$).

Aplicando o Mathcad:

$$\mathbf{K} := \begin{pmatrix} 653846 & -100000 \\ -100000 & 100000 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} := \begin{pmatrix} 212 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} := \text{genvals}(\mathbf{K}, \mathbf{M}) \quad \mathbf{B} := \text{genvecs}(\mathbf{K}, \mathbf{M})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3916.6 \\ 1667.6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.567 & 0.333 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pode-se mostrar que a solução analítica deste problema pode ser encontrada através das duas soluções da equação biquadrática:

$$(\omega^2)^2 - \left(\frac{k}{m} + \frac{k+K}{M}\right) \cdot \omega^2 + \frac{k \cdot K}{m \cdot M} = 0 \quad ; \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{k + K - M \cdot \omega^2}{k}$$

Aplicando-se estas expressões para o mesmo exemplo, agora com $k = 200.000 \text{ kN/m}$:

$$(\omega^2)^2 - 8556.\omega^2 + 13.062.406 = 0;$$

$$\omega_1^2 = 1989; \omega_1 = 44,6 \text{ rad/s}; f_1 = 7,10 \text{ Hz}; U_{12} = 1,66$$

$$\omega_2^2 = 6567; \omega_2 = 81,0 \text{ rad/s}; f_2 = 12,9 \text{ Hz}; U_{22} = -3,19$$

1.4.2 - Resposta ao carregamento dinâmico geral

$$\mathbf{M} \mathbf{u}''(t) + \mathbf{C} \mathbf{u}'(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$$

- Resposta por superposição modal

Transformando as coordenadas geométricas em coordenadas modais:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{u}_N = Y_1(t) \mathbf{u}_{N1} + Y_2(t) \mathbf{u}_{N2} + Y_3(t) \mathbf{u}_{N3} + \dots \quad (\mathbf{u}_N \text{ é a matriz das formas modais})$$

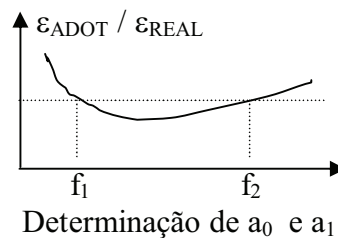
Cada amplitude modal $Y_i(t)$ é obtida da análise de cada frequência própria desacoplada:

$$Y_i''(t) + 2 \varepsilon_i \omega_i Y_i'(t) + \omega_i^2 Y_i(t) = \frac{F_i(t)}{M_i}$$

Onde:

$$M_i = \mathbf{u}_{Ni}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_{Ni} \quad F_i(t) = \mathbf{u}_{Ni}^T \cdot \mathbf{F}(t)$$

$$\text{Se } \mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}, \quad \varepsilon_i = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_0}{\omega_i} + a_1 \cdot \omega_i \right)$$



- Resposta à solicitação harmônica

$$\mathbf{M} \mathbf{u}''(t) + \mathbf{C} \mathbf{u}'(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F} e^{i\omega t}; \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u} e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u} e^{i\omega t} = \mathbf{F} e^{i\omega t}$$

O problema é análogo ao estático, em variáveis complexas, com a matriz de rigidez equivalente:

$$\mathbf{K}_{EQUIV} = -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}$$

Como qualquer função pode ser expandida em uma série harmônica, a solução acima pode ser generalizada para resolver quaisquer variações no tempo das funções de carregamento, em uma análise no domínio da frequência.

- Consideração do amortecimento

No método de superposição modal, para cada modo de vibração i , deve ser avaliado, para cada modo de vibração, uma fração de amortecimento crítico ε_i . A consideração de amortecedores discretos fica muito aproximada.

Nos métodos de integração direta no domínio do tempo, a matriz de rigidez deve ser montada de forma explícita, por exemplo, conforme indicado acima:

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}$$

No problema harmônico, ou nas soluções no domínio da frequência, além da matriz de amortecimento acima definida, que representa o amortecimento do tipo viscoso, o amortecimento dos materiais (do tipo histerético), pode ser introduzido pelo módulo de deformação complexo dos materiais:

$$E^* = E (1 + 2\beta.i)$$

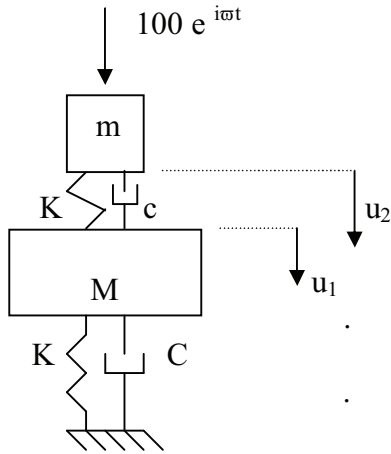
β é a fração de amortecimento crítico de cada material e i é a unidade imaginária.

Pode-se obter uma relação de equivalência entre os amortecimentos viscoso e histerético:

$$\text{Força de amortecimento viscoso} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}'(t); \quad \text{Força de amortecimento histerético} = 2 \cdot \xi_{HIST} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(t)$$

Como no problema harmônico $\mathbf{u}'(t) = \omega \mathbf{u}(t)$, igualando-se as duas: $\xi_{HIST} = \xi_{VISC} \cdot \beta$

- Exemplo: Bloco Rígido com máquina montada sobre amortecedores



- Solução literal:

$$\left(-\omega^2 \cdot \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + i \cdot \omega \cdot \begin{bmatrix} C + c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K + k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} K_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_3 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = -\omega^2 M + i \cdot \omega^2 \cdot (C + c) + (K + k)$$

$$K_2 = -i \cdot \omega \cdot c + k$$

$$K_3 = -\omega^2 M + i \cdot \omega^2 \cdot c + k$$

Para $F_1 = 0$ e $F_2 \neq 0$:

$$K_1 \cdot U_1 - K_2 \cdot U_2 = 0$$

$$-K_2 \cdot U_1 + K_3 \cdot U_2 = F_2$$

$$U_2 = \frac{K_1}{K_2} \cdot U_1 \quad \left(-K_2 + \frac{K_1 \cdot K_3}{K_2}\right) \cdot U_1 = F_2 \quad (-K_2^2 + K_1 \cdot K_3) \cdot U_1 = F_2 \cdot K_2$$

$$U_1 = \frac{F_2 \cdot K_2}{K_1 \cdot K_3 - K_2^2} \quad U_2 = \frac{F_2 \cdot K_1}{K_1 \cdot K_3 - K_2^2}$$

Para $F_2 = 0$ e $F_1 \neq 0$:

$$K_1 \cdot U_1 - K_2 \cdot U_2 = F_1$$

$$-K_2 \cdot U_1 + K_3 \cdot U_2 = 0$$

$$U_1 = \frac{K_3}{K_2} \cdot U_2 \quad \left(\frac{K_1 \cdot K_3}{K_2} - K_2\right) \cdot U_2 = F_1 \quad (K_1 \cdot K_3 - K_2^2) \cdot U_2 = F_1 \cdot K_2$$

$$U_1 = \frac{F_1 \cdot K_3}{K_1 \cdot K_3 - K_2^2} \quad U_2 = \frac{F_1 \cdot K_2}{K_1 \cdot K_3 - K_2^2}$$

- Considerando os dados do Exemplo 3:

$M = 212t$; $m = 40t$; $K = 553.846 \text{ kN/m}$; $C = 0$ (adotado); $k = 100.000 \text{ kN/m}$

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} 653846 & -100000 \\ -100000 & 100000 \end{vmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 212 & 0 \\ 0 & 40 \end{vmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \end{vmatrix}$$

Resposta na massa "m", representada na figura abaixo.

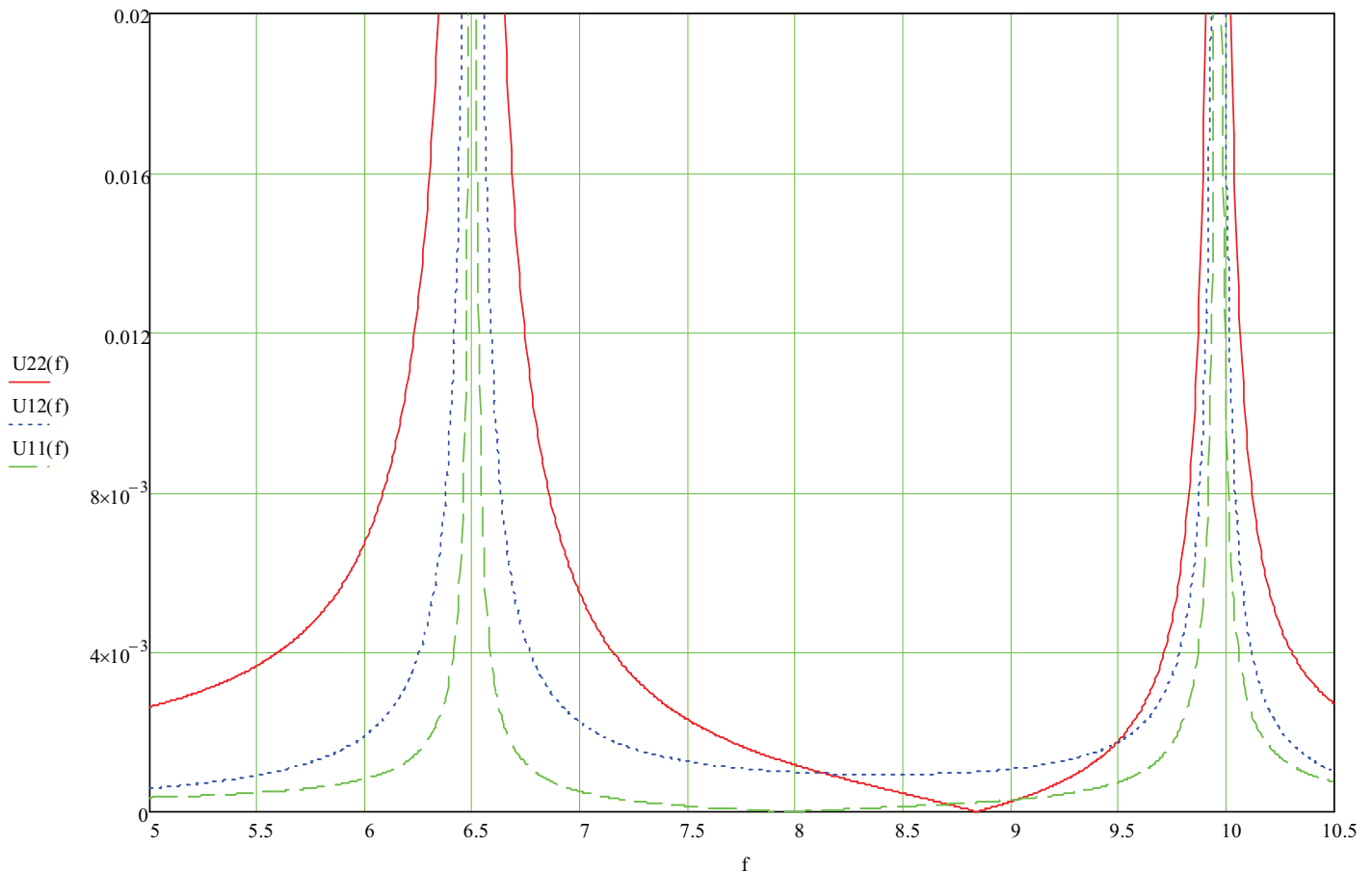
$$M := 212 \quad m := 40 \quad K := 553846 \quad k := 100000 \quad C := 0.1 \quad c := 0.08 \quad P := 100$$

$$K1(f) := K + k + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot (C + c) - (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot M \quad K2(f) := k + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot c \quad K3(f) := k + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot c - (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot m$$

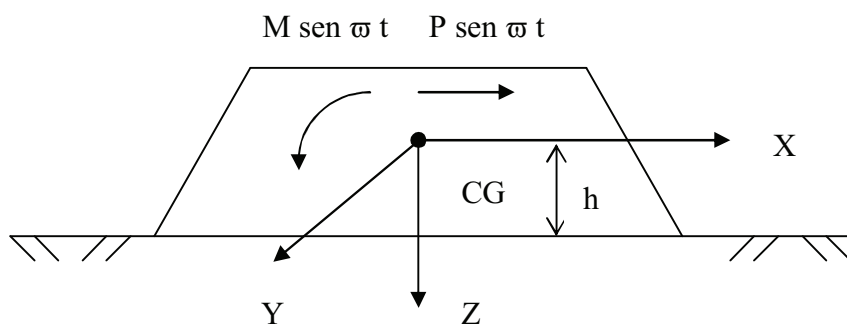
$$U01(f) := \frac{P \cdot K2(f)}{K3(f) \cdot K1(f) - K2(f)^2} \quad U12(f) := \left[(\operatorname{Re}(U01(f)))^2 + (\operatorname{Im}(U01(f)))^2 \right]^{0.5}$$

$$U02(f) := \frac{P \cdot K1(f)}{K3(f) \cdot K1(f) - K2(f)^2} \quad U22(f) := \left[(\operatorname{Re}(U02(f)))^2 + (\operatorname{Im}(U02(f)))^2 \right]^{0.5}$$

$$U01(f) := \frac{P \cdot K3(f)}{K3(f) \cdot K1(f) - K2(f)^2} \quad U11(f) := \left[(\operatorname{Re}(U01(f)))^2 + (\operatorname{Im}(U01(f)))^2 \right]^{0.5}$$



- Caso de bloco rígido com solicitações horizontais



$$\mathbf{M} \mathbf{u}''(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F} \sin \omega t$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u} \sin \omega t = \mathbf{F} \sin \omega t$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

$$\left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J_{YY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_X & K_X h \\ K_X h & (K_{YY} + K_X h^2) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_X \\ u_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix}$$

M e J_{YY} são, respectivamente, massa total do bloco e momento de inércia de massa relativo ao eixo Y, passando pelo CG (centro de gravidade); K_X e K_{YY} são as molas translacionais e rotacionais da fundação com relação ao terreno, nos sentidos X e YY; P e M são a força horizontal e o momento, relativamente ao CG do bloco; u_X e u_{YY} são deslocamento e rotação resultantes, também com relação ao CG. A matriz de rigidez acima pode ser interpretada como:

Aplicando-se ao C.G. uma força igual a K_X e um momento igual a $K_X \cdot h$ corresponde à aplicação na base de uma força igual a K_X e um momento nulo o que provoca um deslocamento unitário e uma rotação nula, tanto na base quanto no C.G.

Aplicando-se ao C.G. uma força igual a $K_X \cdot h$ e um momento igual a $(K_X \cdot h + K_{YY})$ corresponde à aplicação na base de uma força igual a $K_X \cdot h$ e um momento igual a K_{YY} ; isto provoca na base um deslocamento igual a h e uma rotação unitária; isto corresponde a um deslocamento nulo e uma rotação unitária no C.G.

2. MODELAGEM DO SUBSOLO

2.1 Avaliação das Propriedades Dinâmicas dos Solos

- Parâmetros elásticos a serem definidos

No caso de fundações de máquinas, o parâmetro crítico no projeto é a limitação de deslocamentos, em valores da ordem de microns. Assim, o solo tem deformações muito pequenas (distorções da ordem de 10^{-4} a $10^{-3}\%$), o que permite o emprego de soluções em que o comportamento do solo é ainda elástico e linear. Em uma determinada região do solo considerada como homogênea, os seguintes parâmetros elásticos devem ser definidos:

G – módulo de deformação transversal (em kN/m^2)

ν - coeficiente de Poisson

ρ – massa específica (em t/m^3)

ε – fração de amortecimento crítico

Apesar de em Dinâmica dos Solos, o parâmetro elástico a ser definido para o solo é G , como visto acima, pode-se avaliar o módulo de deformação transversal do solo pela expressão:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Avaliação do módulo de deformação transversal (G)

O parâmetro mais difícil de ser avaliado e de maior influência nos resultados é o módulo de deformação transversal (G). Em fundações de maior responsabilidade, devem ser realizados ensaios específicos para a sua avaliação. Em fundações mais leves, o parâmetro pode ser avaliado, com muito menor precisão, a partir da caracterização do solo ou de resultados de ensaios tipo SPT.

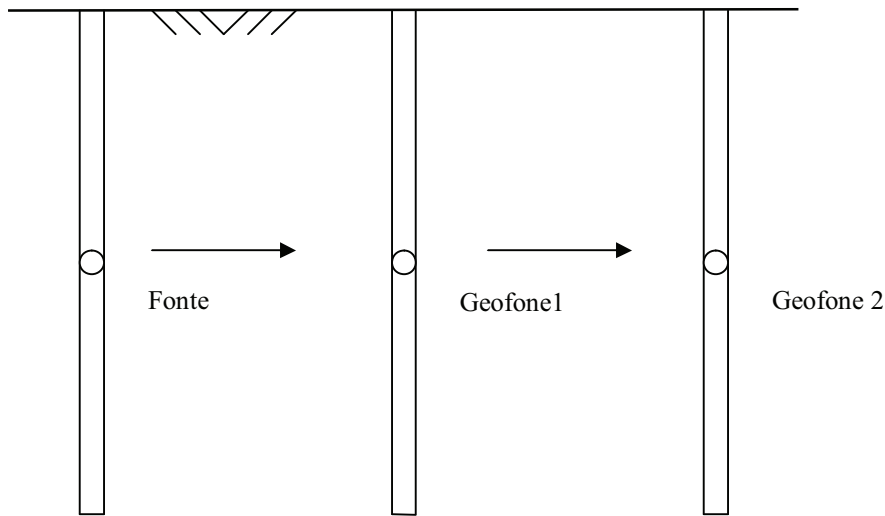
Normalmente, o ensaio mais indicado para a avaliação de G (e também de ν) é conhecido como “cross-hole”, realizado no campo, com resultados muito precisos. Este ensaio é normalizado pela ASTM D4428-91 (ver [7], pg. 417). O ensaio é esquematizado a seguir.

São utilizados três furos no subsolo, alinhados, revestidos com calda de cimento. São realizados os ensaios ao longo da profundidade, consistindo em gerar, no primeiro dos furos, ondas sísmicas a partir de uma fonte (martelo). Na mesma profundidade, nos dois outros furos, são medidos, em geofones, os tempos de chegada das ondas de compressão (P) e de cisalhamento (S). Com a diferença dos tempos de chegada nos dois geofones e com a distância entre os furos, são medidas as velocidades v_P e v_S das ondas P e S .

Da teoria de propagação tridimensional de ondas:

$$G = \rho v_S^2$$

$$\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{(v_P^2 - 2 \cdot v_S^2)}{v_P^2 - v_S^2}$$



ENSAIO “CROSS-HOLE”

Na impossibilidade da realização de ensaios como o acima descrito, o parâmetro G deve ser avaliado empiricamente. Para solos não coesivos, se identifica que as seguintes características do solo influenciam em seu valor numérico:

- forma e dimensões dos grãos
- índice de vazios, ou densidade relativa.
- pressão efetiva média

As expressões abaixo foram propostas por Richart et al. [4], pg. 154, para areias (corresponde a um estado não deformado, ou seja, deformações distorcionais específicas menores que 10^{-5}). Nestas expressões, e é o índice de vazios (volume de vazios/ volume de sólidos).

- Areias de grãos arredondados ($0,35 \leq e \leq 0,85$):

$$G = 218 \sigma_m^{1/2} (2,17 - e)^2 / (1+e) \quad (G \text{ e } \sigma_m \text{ em MPa})$$

- Areias de grãos angulosos ($0,60 \leq e \leq 1,30$):

$$G = 102 \sigma_m^{1/2} (2,97 - e)^2 / (1+e) \quad (G \text{ e } \sigma_m \text{ em MPa})$$

σ_m é a pressão octaédrica média, variável de acordo com o ponto considerado no solo:

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$$

$$\text{Onde } \sigma_2 = \sigma_3 = K_0 \sigma_1$$

K_0 é o coeficiente de empuxo no repouso que varia tipicamente em uma faixa de 0,4 a 0,5 para areias e 0,5 a 0,8 para argilas (ver [7], pg. 72). Em areias, K_0 decresce com ϕ . Para $\phi = 30^\circ$, têm-se $K_0 = 0,5$.

O valor numérico de σ_m é função da pressão imposta na superfície do solo pela fundação (que varia de forma decrescente na profundidade) e com a pressão (efetiva) devida ao peso de terra (crescente com a profundidade). Em solos homogêneos, é razoável tomar σ_m como igual ao peso efetivo de terra em uma profundidade igual ao raio de uma fundação circular equivalente à real.

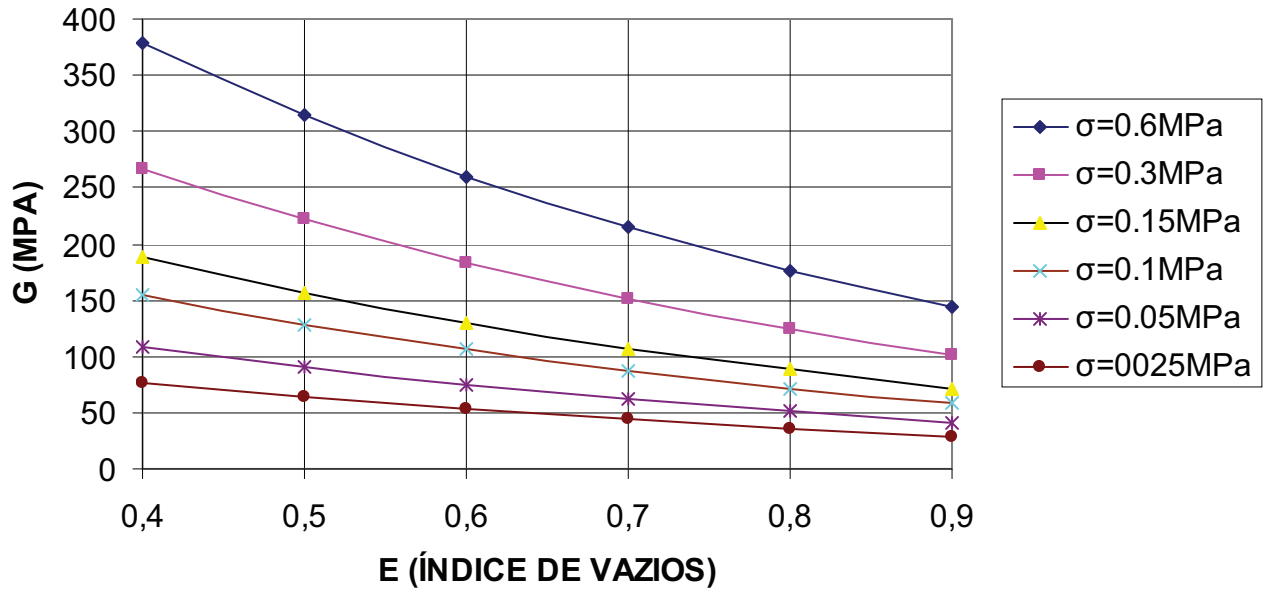
Gráficos destas duas expressões são apresentados a seguir.

A segunda das expressões acima pode ser aplicada para argilas normalmente adensadas. Neste caso os valores numéricos a adotar para e são dados a seguir:

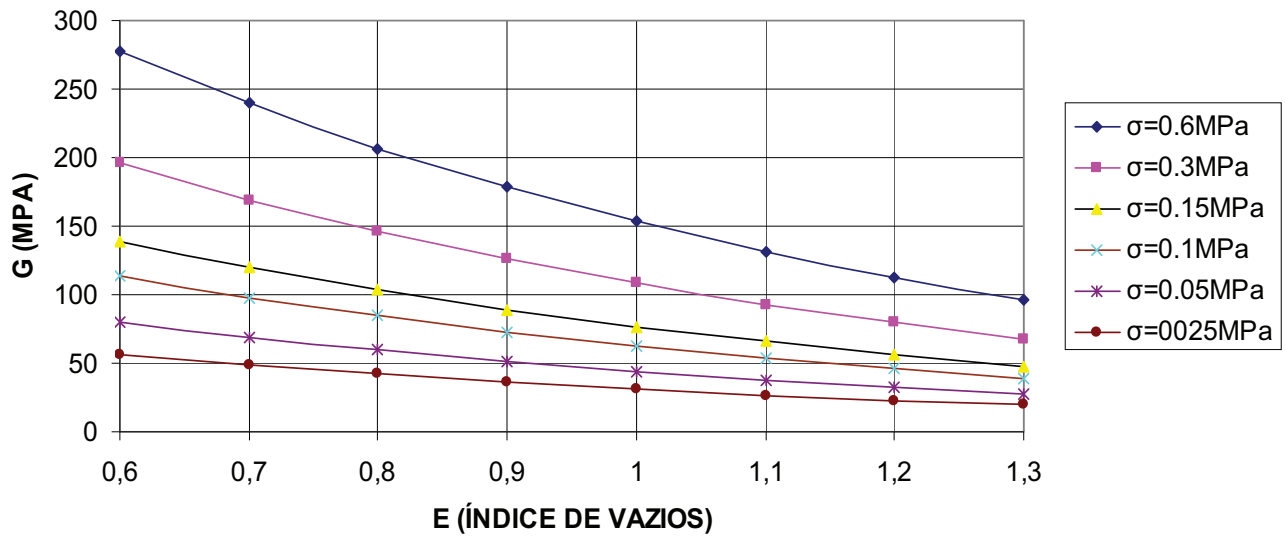
Argila	Mole	Média	Rija	Dura
e	$\geq 1,5$	0,6	0,3	0,2

Para areias, podem ser considerados como valores extremos $e = 0,35$ para areias muito compactas e $e = 1,05$ para areias muito fofas; para uma areia média pode-se considerar $e = 0,70$.

G PARA GRÃOS ARREDONDADOS

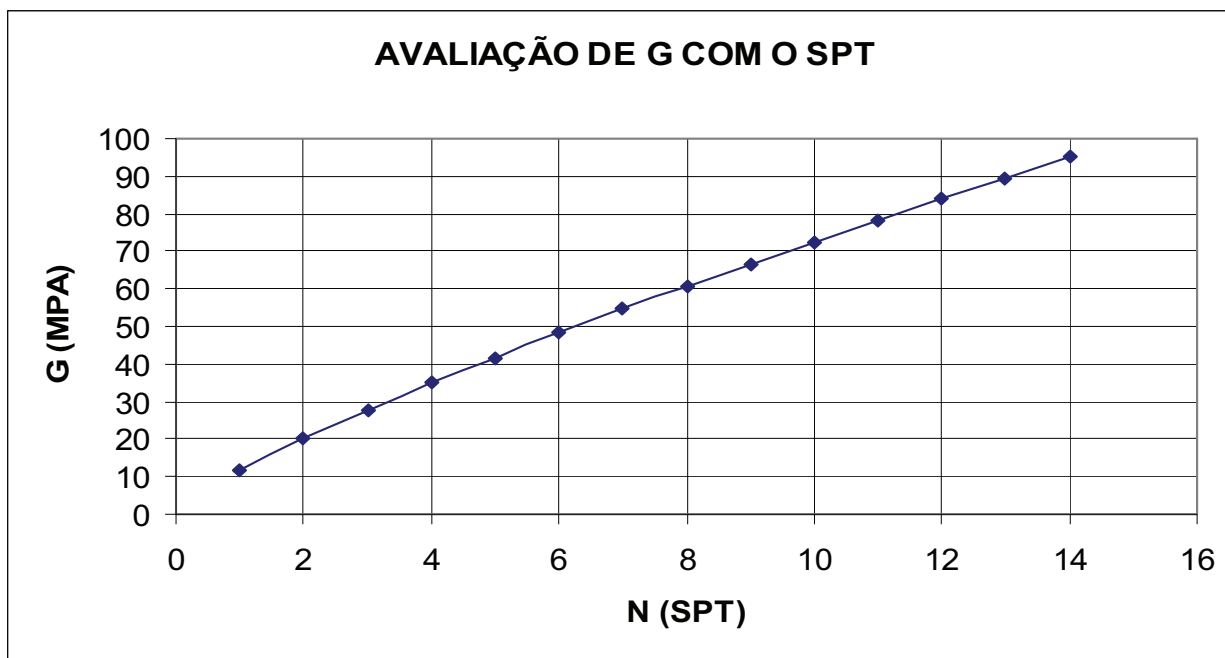


G PARA GRÃOS ANGULOSOS



Uma outra indicação para uma avaliação empírica de G (Ohsaki e Iwasaki, 1973), é através da expressão abaixo, ilustrada na figura, em que este parâmetro é avaliado é função do número de golpes N do ensaio SPT:

$$G = 11,5 (N_{SPT})^{0,8} \quad (G \text{ em MPa}) \quad (\text{Ohsaki e Iwasaki, 1973, apud [7]})$$



Outras expressões empíricas correlacionando as duas variáveis ([7], pg. 432):

$$V_s = 85,3 (N_{SPT})^{0,341} \quad (V_s \text{ em m/s}) \quad (\text{Ohta e Goto, 1978})$$

$$G = 14,07 (N_{SPT})^{0,68} \quad (G \text{ em MPa}) \quad (\text{Imai e Tonouchi, 1982})$$

$$G = 6,22 N_{SPT} \quad (G \text{ em MPa, somente para areias}) \quad (\text{Seed et al., 1983})$$

$$V_s = 101 (N_{SPT})^{0,29} \quad (V_s \text{ em m/s, somente para areias}) \quad (\text{Sykora e Stokoe, 1983})$$

O quadro abaixo fornece valores numéricos indicativos de G para diversos tipos de solo, considerando a capacidade de carga que foi definida em função da caracterização do solo.

Capacidade de Carga (kPa)	Tipo de Solo	G (MPa)
≤ 50	Argilas moles	≤ 20
100	Argilas médias, areias fofas	40
200	Argilas rijas, areias médias	80
300	Argilas duras, areias compactas	120
≥ 500	Rocha alterada ou sã	≥ 180

Deve-se ressaltar que a avaliação do parâmetro G sempre envolverá incertezas e que uma análise paramétrica sempre será necessária, para se investigar como a resposta varia com a possível variação das propriedades do solo. Valores máximos e mínimos para G devem ser considerados na análise paramétrica, com uma variação percentual (por exemplo, de 50%) em torno dos valores mais prováveis (análise para G_{MAX} , $G_{MÉD}$ e G_{MIN}).

- Avaliação dos demais parâmetros elásticos

A tabela abaixo fornece uma estimativa para os demais parâmetros dos solos, a serem empregados na eventual ausência de valores experimentais. Os valores de amortecimento correspondem a uma deformação distorsional de $10^{-4}\%$, correspondente a uma faixa usual de projeto de fundações de máquinas. Os valores da massa específica variam do material menos para o mais denso/compacto. Os valores de coeficiente de Poisson variam do material menos para o mais saturado.

Tipo de solo	ρ (t/ m ³)	ν (Poisson)	ε (amortecimento) %
Areia	1,70 a 2,10	0,30 a 0,40	2,0
Argila	1,40 a 2,00	0,40 a 0,50	2,0
Rocha	2,50 a 2,70	0,15 a 0,30	2,0

- Exemplo de um ensaio real

Horizonte	Massa específica (g/cm ³)	V_p (m/s)	V_s (m/s)	G (MPa)	Poisson
Solo Coluvionar	1,774-1,962 1,868	≤ 30 30	≤ 180 140	37	-
Solo Residual Maduro	1,856-1,933 1,904	350-100 400	≤ 200 170	56	-
Solo Saprolítico	1,922-1,987 1,957	500-350	200-700 450	400	-
Arenito	2,036-2,277 2,170	1742-2673 2400	1000-1700 1300	2212-6392 3800	0,16-0,37 0,26
Siltito	2,195-2,490 2,387	2972-4350 3700	1700-2770 2300	7032-18670 12900	0,26 - 0,41 0,34

- Exemplo numérico

Seja a fundação para um equipamento (motor elétrico), cuja forma geométrica pode ser assimilada a um círculo com raio $r=3m$, sendo a altura do bloco igual a $h=1,20m$. O motor pesa 100kN e durante seu regime de trabalho a 800 rpm, provoca uma força dinâmica vertical cujo módulo pode chegar a 50kN.

A análise dos relatórios de sondagem disponíveis indicou a presença de uma camada de areia fina pouco compacta a medianamente compacta até 12m de profundidade, sobrejacente a uma camada de rocha alterada, impenetrável à percussão. A sondagem não identificou a presença do lençol freático.

Determinar se a amplitude de vibração resultante é admissível.

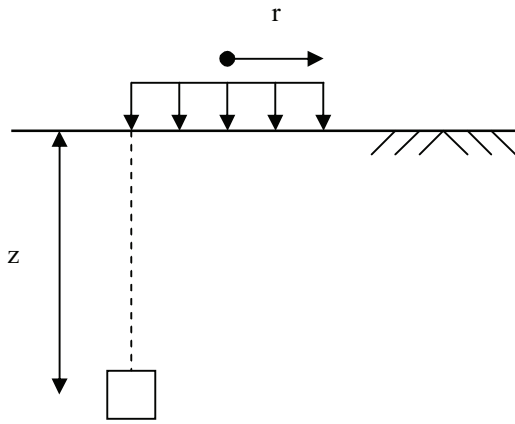
Solução:

Para a determinação do G, será empregada a expressão (areia fina):

$$G = 218 \sigma_m^{1/2} (2,17 - e)^2 / (1+e) \quad (G \text{ e } \sigma_m \text{ em MPa})$$

Serão considerados os valores $e = 0,6$, $\rho = 1,9 \text{ t/ m}^3$ e $\nu = 0,35$

Para o cálculo da pressão efetiva, serão consideradas as tensões devidas ao peso próprio do solo e as tensões adicionais devidas ao peso da fundação e do equipamento. Na ausência do lençol freático, a pressão efetiva devida ao peso do solo é igual a:



$$\sigma_{vS} = \frac{1+2.K_0}{3} \cdot \sigma_{\text{efet}} = \frac{1+2.0,5}{3} \cdot \gamma \cdot z = \frac{2}{3} \cdot 19 \cdot z \quad (\text{kPa})$$

Para o cálculo das tensões adicionais devidas à sobrecarga, utilizaremos a expressão aproximada para a solução de Boussinesq, relacionando tensões verticais na linha da projeção vertical da borda da fundação com a pressão vertical aplicada na superfície (ver [7], pg. 245):

$$\sigma_{v0} = 0,5 \cdot q_0 \cdot 10^{(-0,2 \cdot z/r)} \quad (\text{kPa}) \quad (r = 3,00 \text{ m})$$

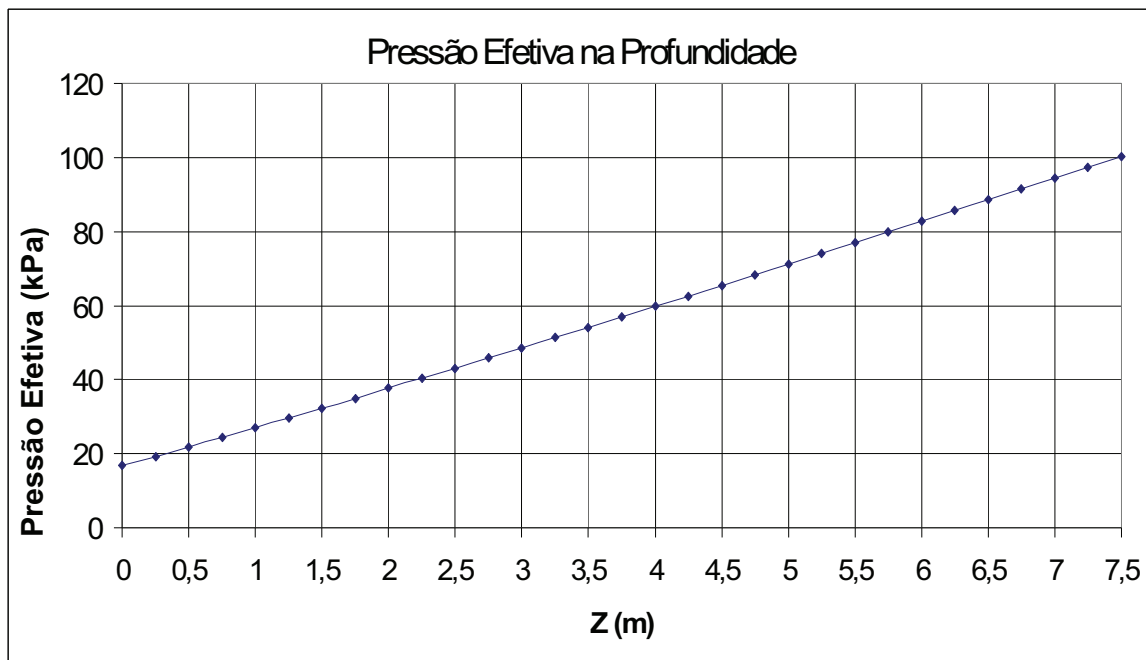
Em nosso caso específico:

$$q_0 = 1,2 \text{ m} \times 25 \text{ kN/m}^3 + \frac{100 \text{ kN}}{\pi \cdot (3 \text{ m})^2} = 33,5 \text{ kPa}$$

A tensão resultante σ_v é então:

$$\sigma_v = 12,67z + 0,5 \cdot 33,5 \cdot 10^{(-0,2 \cdot z/3,00)} \quad (\text{kPa})$$

Esta tensão é representada graficamente na figura abaixo:



Considerando-se como representativo o cálculo de σ_V a 3m de profundidade:

$$\sigma_V = 12,67.3 + 0,5.33,5.10^{(-0,2.3/3,00)} = 48,57\text{kPa} = 0,04857\text{MPa}$$

$$G = 218 \sigma_m^{1/2} (2,17 - e)^2 / (1+e) = 218 \cdot 0,04857^{1/2} (2,17 - 0,6)^2 / (1+ 0,6) = 74 \text{ MPa}$$

Cálculo dos parâmetros condensados:

$$M = 1,2m \cdot \pi \cdot (3m)^2 \cdot 2,5 \text{ t/m}^3 + 10,0 \text{ t} = 94,8 \text{ t}$$

$$K = \frac{4 G r}{1 - \nu} = \frac{4 \cdot 74000 \cdot 3}{1 - 0,35} = 1366000 \text{ kN/m}$$

$$C = \frac{3,4 r^2}{1 - \nu} (\rho G)^{1/2} = \frac{3,4 \cdot 3^2}{1 - 0,35} (1,9 \cdot 74000)^{1/2} = 17652 \text{ kN.s/m}$$

$$C_c = 2 \cdot \sqrt{K \cdot M} = 2 \cdot \sqrt{1366000 \cdot 94,8} = 22759 \text{ kN.s/m}$$

$$\varepsilon = C/C_c = 17652/22759 = 0,7756$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} = 19,105 \text{ Hz} \quad \bar{f} = f_c = \frac{800}{60} = 13,33 \text{ Hz}$$

$$D = \frac{u}{u_{ST}} = \frac{1}{[(1 - \beta^2)^2 + (2\beta\varepsilon)^2]^{1/2}} \quad \beta = \frac{13,44}{19,105} = 0,698$$

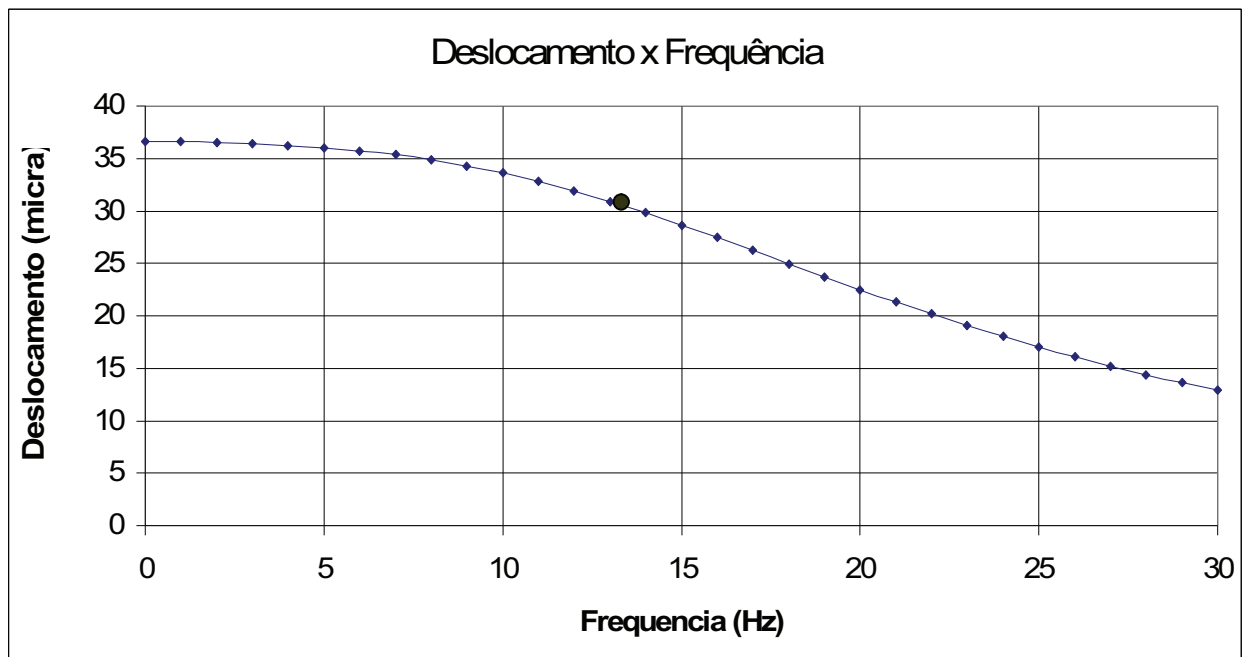
$$u = D \cdot F / K = D \cdot 50 / 1366000$$

$$\text{Para } f_c = 13,33 \text{ Hz, } D=0,835, u = 30,6 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 30,6 \mu\text{m}$$

Para motores elétricos, este valor é “aceitável” pela ISO2372 e corresponde a:

$$v_{\text{eff}} = u \cdot \omega / \sqrt{2} = 30,6 \cdot 10^{-6} \cdot 13,33 \cdot 2 \cdot \pi / \sqrt{2} = 1,81 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} = 1,81 \text{ mm/s } (< 2,8 \text{ mm/s})$$

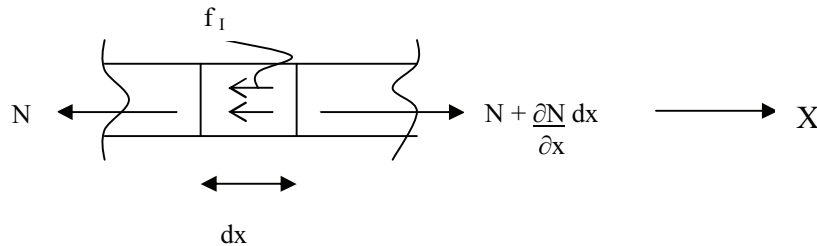
Para outros valores de frequência de excitação, temos a resposta no gráfico:



2.2 Propagação Tridimensional de Ondas nos Solos

- Propagação unidimensional de ondas em uma barra (ver [1], pg. 411).

Seja um trecho de barra horizontal, com tensões e deformações presentes em seu sentido longitudinal:



A equação de movimento pode ser derivada do equilíbrio de forças no sentido horizontal do trecho de barra (eixo X):

$$N + f_i dx - (N + \frac{\partial N}{\partial x} dx) = 0$$

f_i é a força de inércia distribuída por unidade de comprimento da barra:

$$f_i = \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Por substituição:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Introduzindo-se a relação força axial – deslocamento:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (EA \frac{\partial u}{\partial x}) = 0$$

No caso particular em que a rigidez axial EA é constante ao longo do eixo:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Que pode se reescrita como:

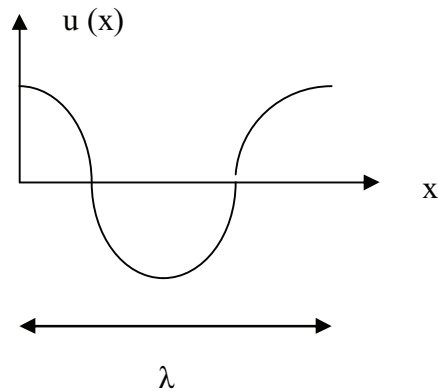
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Onde definimos a grandeza C, dimensional a uma velocidade:

$$C = \sqrt{(EA/\bar{m})} = \sqrt{E/\rho}$$

Quaisquer funções $u(x+Ct)$ ou $u(x-Ct)$ são soluções da equação acima.

Quando a excitação é harmônica, define-se o comprimento de onda $\lambda = C / \bar{f}$



- Exemplo:
 $u = (x-Ct)^3 + 8$
 $u = x^3 - 3x^2 Ct + 3x C^2 t^2 - C^3 t^3 + 8$
 $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6x Ct + 3C^2 t^2$
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 6Ct = 6(x-Ct)$
 $\frac{\partial u}{\partial t} = -3x^2 C + 6x C^2 t - 3C^3 t^2$
 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 6x C^2 - 6C^3 t = 6C^2(x-Ct)$

Verifica-se, por substituição, o atendimento à equação de propagação de ondas.

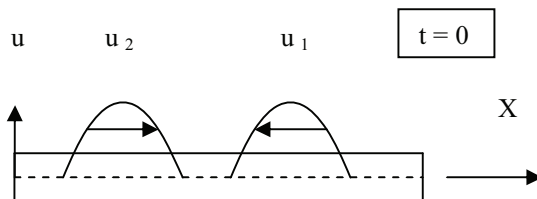
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- Solução geral da propagação unidimensional

A solução geral é da forma:

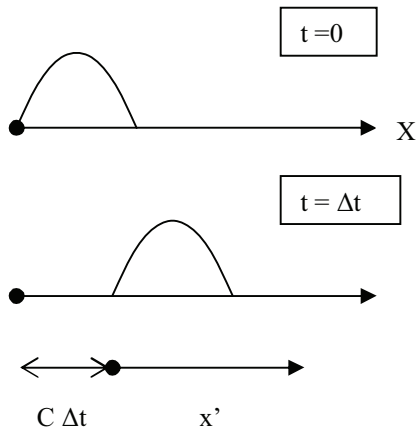
$$u(x,t) = u_1(x+Ct) + u_2(x-Ct)$$

Como será visto a seguir, a interpretação física para as duas parcelas da solução é a de um par de ondas, u_1 se propagando no sentido negativo do eixo X e u_2 se propagando no sentido positivo.



Num instante, por exemplo, $t=0$, o campo de deslocamento é função somente da posição. Seja, por exemplo, para uma onda no sentido positivo do eixo, expressa pela função:

$$u = 2(x-Ct) - (x-Ct)^2 \quad (t \geq 0 \text{ e } u \geq 0)$$



Para $t=0$ temos a equação dos deslocamentos:
 $u = 2x - x^2$ ($u \geq 0$)

Para $t = \Delta t$, temos os deslocamentos:
 $u = 2(x-C\Delta t) - (x-C\Delta t)^2$ ($u \geq 0$)

Criando a nova variável $x' = x-C\Delta t$:
 $u = 2x' - x'^2$ ($u \geq 0$)

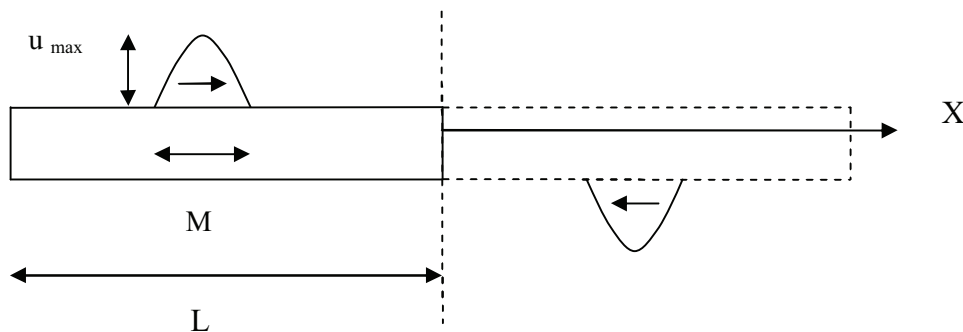
Ou seja, a curva de deslocamentos é a mesma, com a defasagem no espaço de $C\Delta t$, ou seja, a onda no período de tempo Δt percorre o espaço $C\Delta t$ e a velocidade de propagação da onda é efetivamente igual a C .

As tensões são iguais a:

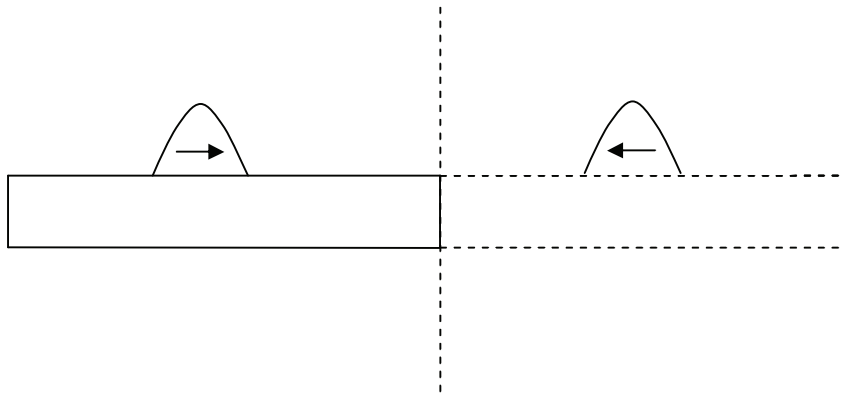
$$\sigma(x,t) = E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

Para a consideração das condições de contorno em uma extremidade, são consideradas uma onda se propagando na barra real no sentido positivo do eixo X e outra se propagando no sentido contrário em uma barra simétrica fictícia.

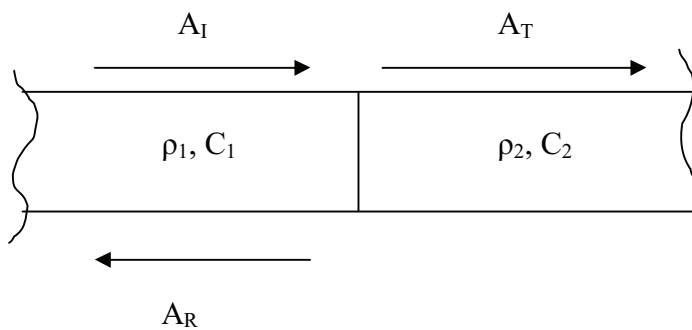
- Onda se propagando em direção a uma extremidade engastada:



- Onda se propagando em direção a uma extremidade livre:



- Reflexão e refração de ondas na interface de meios desiguais



$$\alpha = \frac{\rho_2 \cdot C_2}{\rho_1 \cdot C_1} = \sqrt{\frac{G_2 \cdot \rho_2}{G_1 \cdot \rho_1}} \quad (\alpha \geq 1, v_1 = v_2)$$

Deslocamentos: $A_R = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} A_I$; $A_T = \frac{2}{\alpha+1} A_I$

- Exemplo de solução

Um exemplo possível de solução é uma equação da forma (típico de cravação de estaca):

Fazendo: $z = x/M$ (variável adimensional)

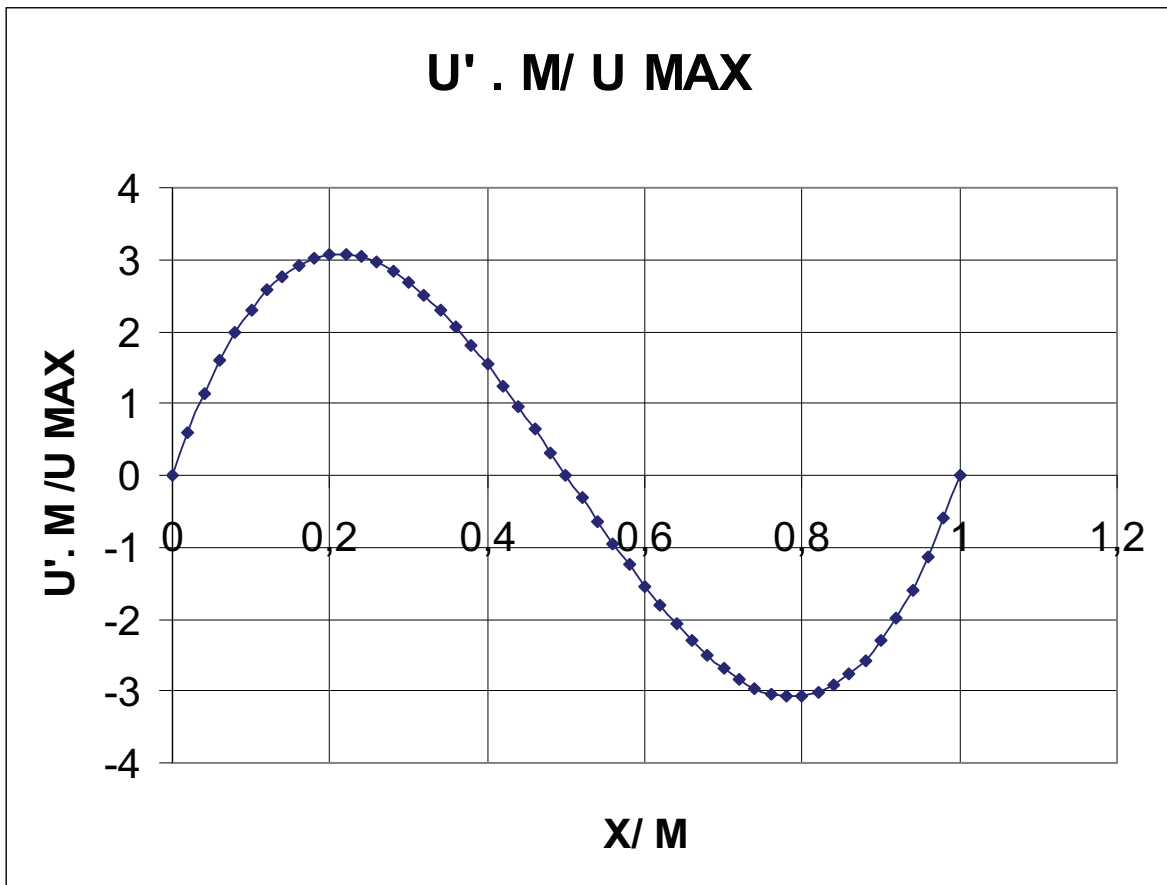
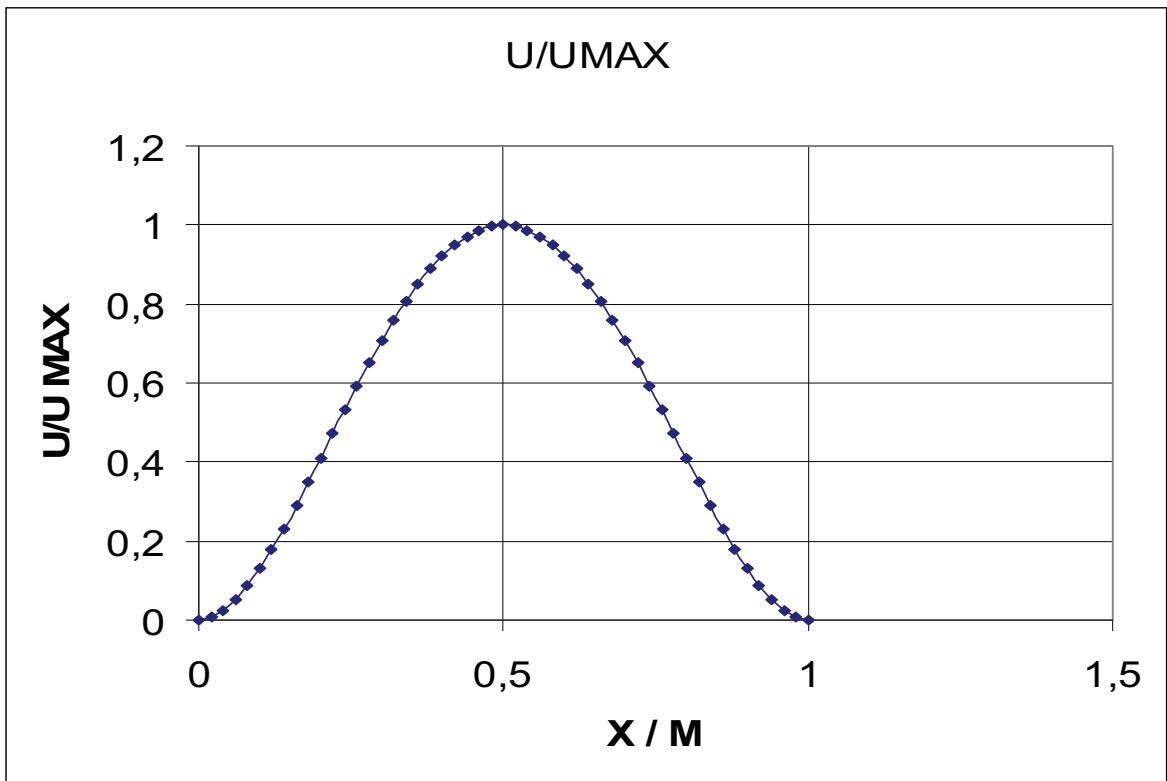
$$U = U_{MAX} \cdot 16 (z^4 - 2z^3 + z^2)$$

$$U' = U_{MAX} / M \cdot 16 (4z^3 - 6z^2 + 2z) \quad (U' = \frac{\partial U}{\partial x})$$

(x mede a profundidade na vertical, a partir do topo da estaca)

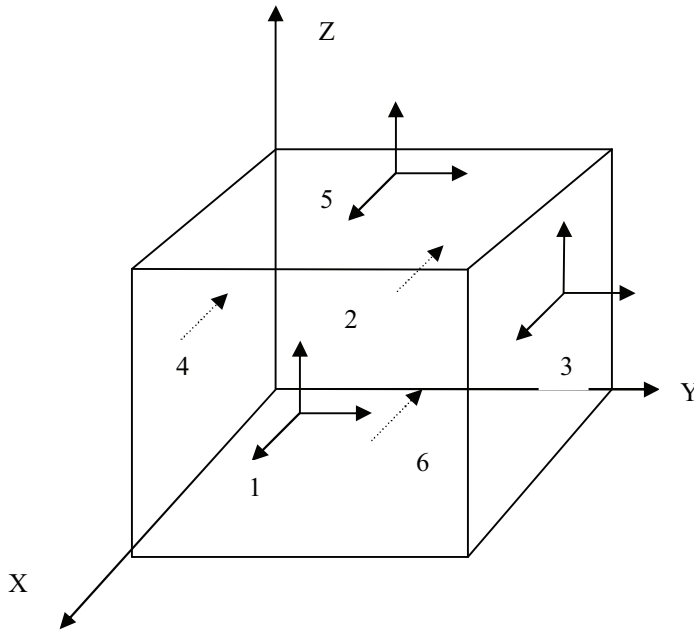
$$\sigma(x,t) = E U'$$

As funções U/U_{MAX} e $U' \cdot M/U_{MAX}$ são plotadas a seguir.



- Propagação tridimensional de ondas no meio contínuo

Equações de equilíbrio no elemento prismático infinitesimal em um meio elástico infinito (ver [4], pg. 76):



Equilíbrio segundo o eixo X, considerando as seis parcelas identificadas acima:

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x) \Delta y \Delta z - \sigma_x \Delta y \Delta z + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \Delta y) \Delta x \Delta z - \tau_{xy} \Delta x \Delta z + \\
 & + (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \Delta z) \Delta x \Delta y - \tau_{xz} \Delta x \Delta y = \rho (\Delta x \Delta y \Delta z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Considerando as três direções e operando as equações chega-se às expressões:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + G \nabla^2 u$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + G \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + G \nabla^2 w$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

A primeira solução para as equações de movimento é obtida diferenciando-se as três equações de movimento acima por x , y e z , respectivamente e somando-as. Obtém-se:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \varepsilon$$

ou:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = V_P^2 \nabla^2 \varepsilon \quad V_P^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}$$

Esta é a equação de propagação de ondas de dilatação volumétrica ε com velocidade V_P (V_P – velocidade de onda primária ou de compressão). A característica fundamental desta onda é que o movimento das partículas do solo se desenvolve na mesma linha em que a onda está se propagando (similar à propagação das ondas axiais em uma haste).

A segunda solução é obtida diferenciando a segunda equação de movimento em relação a z e a terceira em relação a y e subtraindo-se uma da outra. Obtém-se:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \cdot \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Por outro lado, podemos expressar as rotações em função dos deslocamentos por:

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

Pode-se então escrever:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = G \cdot \nabla^2 \omega_x$$

$$\text{ou } \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = V_s^2 \cdot \nabla^2 \omega_x \quad \text{onde } V_s^2 = \frac{G}{\rho}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} = V_s^2 \cdot \nabla^2 \omega_y$$

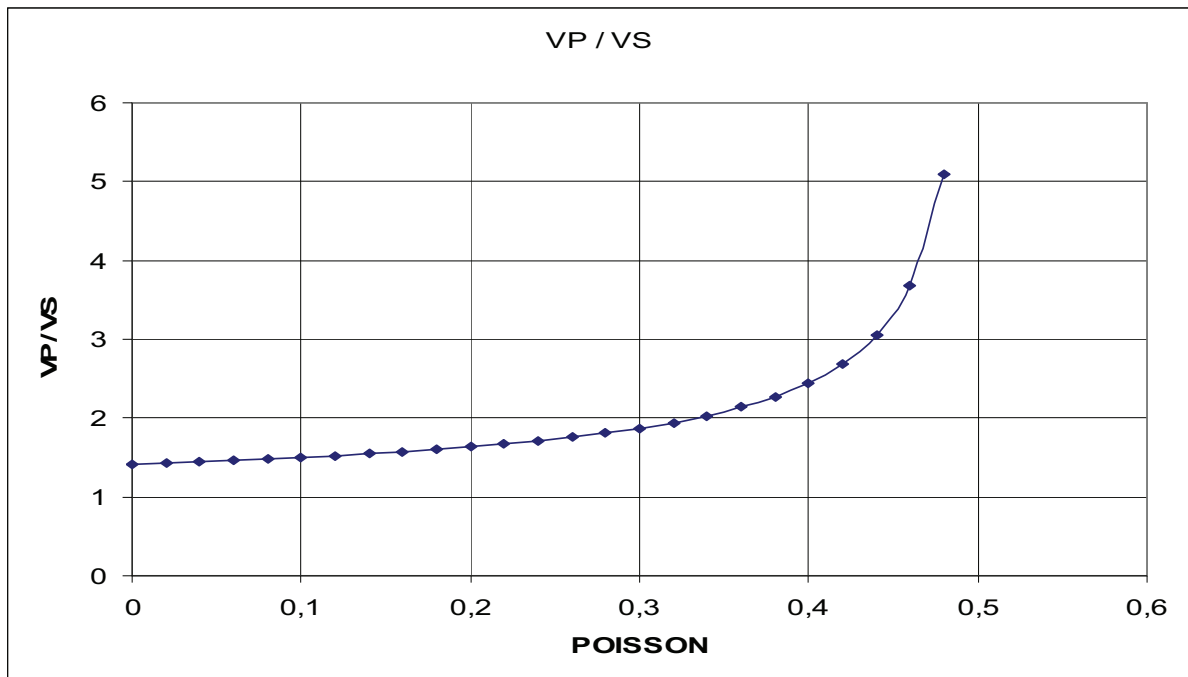
$$\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = V_s^2 \cdot \nabla^2 \omega_z$$

Estas são as equações de propagação de ondas de distorção ω com velocidade V_S (V_S - velocidade de onda secundária ou de cisalhamento). A característica essencial desta onda é que o movimento das partículas do solo se desenvolve perpendicularmente à linha em que a onda está se propagando.

A figura a seguir mostra a relação entre as velocidades de onda Primária e Secundária:

$$\frac{V_P}{V_S} = \sqrt{\frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}}$$

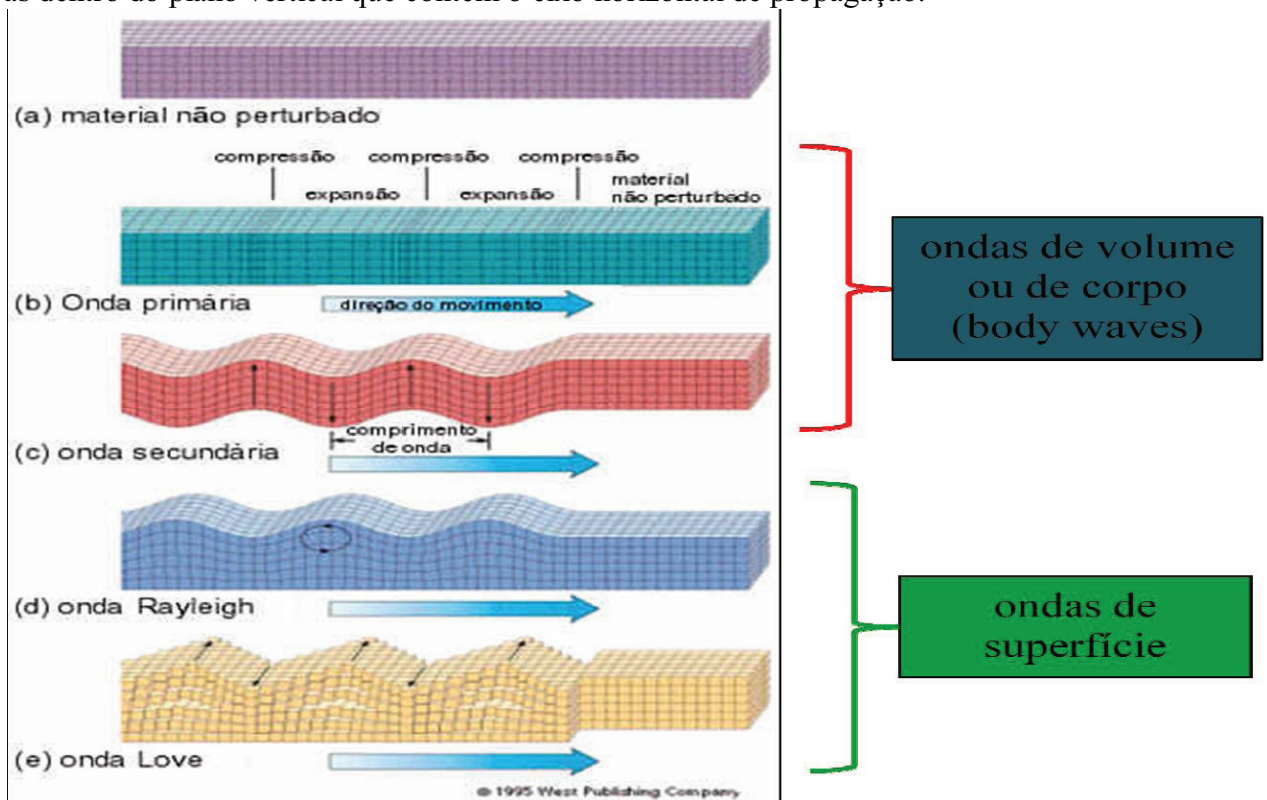
Esta relação varia entre $\sqrt{2}$ e ∞ .



Outros tipos de ondas surgem nos limites (horizontais) entre camadas de solo (ondas Q - de Love) ou na superfície livre de uma camada (ondas R - de Rayleigh).

As ondas de Love se caracterizam pelo deslocamento das partículas do solo perpendicularmente ao eixo horizontal de propagação, dentro de um plano horizontal.

As ondas de Rayleigh se caracterizam pelo deslocamento das partículas de solo em trajetórias eclípticas dentro do plano vertical que contém o eixo horizontal de propagação.

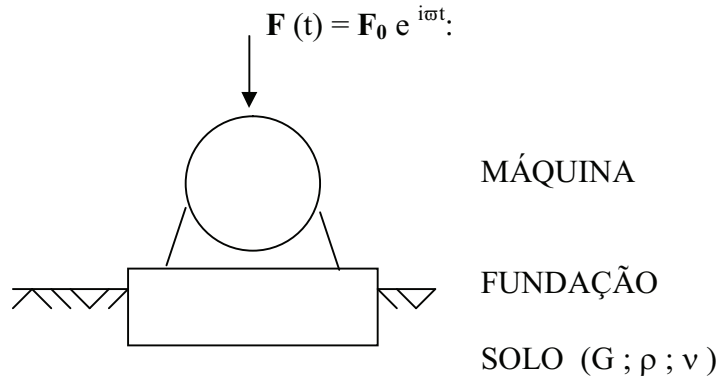


Uma interessante visualização da propagação de ondas pode ser também encontrada em: <http://www.ndt-ed.org/EducationResources/CommunityCollege/Ultrasonics/Physics/wavepropagation.htm>

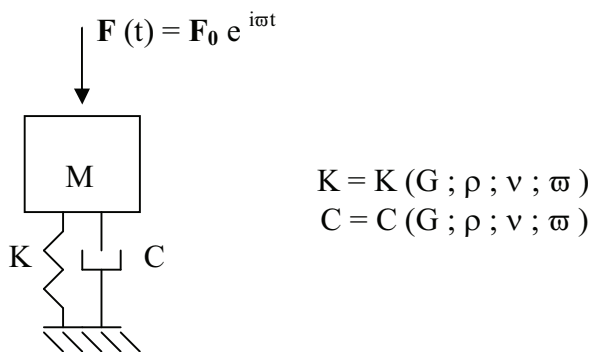
3. ANÁLISE DE FUNDAÇÕES DIRETAS E SOBRE ESTACAS

3.1 Fundações Diretas Sobre Solo Homogêneo

PROBLEMA FÍSICO



MODELO ANÁLOGO PARA BLOCOS RÍGIDOS (6GL)



Este modelo é uma forma de se representar matematicamente a solução do problema acima. Somente para solo homogêneo, será possível se considerar diretamente soluções independentes da frequência de excitação ω .

- Parâmetros para fundações circulares com raio r (Richart, [4], pg.350 e 382):

Grau de Liberdade	Mola	$\varepsilon = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$	Fração de Massa (B)
Vertical	$K_z = \frac{4Gr}{1-\nu}$	$\varepsilon_z = \frac{0,425}{\sqrt{B_z}}$	$B_z = \frac{1-\nu}{4} \cdot \frac{M}{\rho r^3}$
Horizontal	$K_x = \frac{32(1-\nu)Gr}{7-8\nu}$	$\varepsilon_x = \frac{0,288}{\sqrt{B_x}}$	$B_k = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \cdot \frac{M}{\rho r^3}$
Rotacional	$K_\psi = \frac{8Gr^3}{3(1-\nu)}$	$\varepsilon_\psi = \frac{0,15}{(1+B_\psi)\sqrt{B_\psi}}$	$B_\psi = \frac{3(1-\nu)I_\psi}{8\rho r^5}$
Torsional	$K_\theta = \frac{16Gr^3}{3}$	$\varepsilon_z = \frac{0,5}{1+2B_\theta}$	$B_\theta = \frac{I_\theta}{\rho r^5}$

Para um disco circular, $I_\psi = \frac{\pi r^4}{4} \rho h = \frac{M r^2}{4}$ $I_\theta = 2 I_\psi$

Expressões explícitas para os amortecedores de radiação:

Vertical (C_z)	Horizontal (C_x)	Rotacional (C_ψ)	Torsional (C_θ)
$\frac{3.4r^2}{1-\nu} \cdot \sqrt{\rho G}$	$\frac{18.4 \cdot (1-\nu) \cdot r^2}{7-8\nu} \cdot \sqrt{\rho G}$	$\frac{0.8 \cdot r^4}{\nu \cdot (1+B_\psi)} \cdot \sqrt{\rho \cdot G}$	$\frac{1}{1+2 \cdot B_\theta} \cdot \sqrt{\frac{16 \cdot G r^3 \cdot I_\theta}{3}}$

Os amortecedores podem também ser avaliados indiretamente, através da expressão:

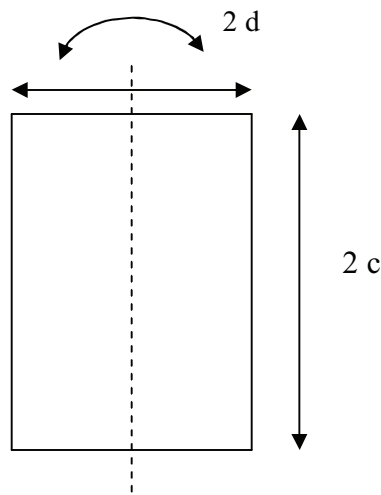
$$C = 2\varepsilon\sqrt{KM}$$

- Exemplo 2 com $h=1,80m$

$$M = 167.2 \quad I_\psi = 376.2$$

Grau de Liberdade	Coefficientes de Rigidez(K)	Fração de Massa (B)	Fração de Amortecimento(ε)	Amortecedores (C)
Vertical	553.846	0,559	0,568	10.940
Horizontal	445.714	0,695	0,346	5.956
Rotacional	3.323.077	0,210	0,271	19.151
Torsional	4.320.000	1,72	0,113	12.840

- Parâmetros para fundações retangulares (Richart):



$$K_z = \frac{G}{1-\nu} \beta_z \sqrt{4cd}$$

$$K_x = 4(1+\nu)G\beta_x \sqrt{cd}$$

$$K_\psi = \frac{8G}{1-\nu} \beta_\psi cd^2$$

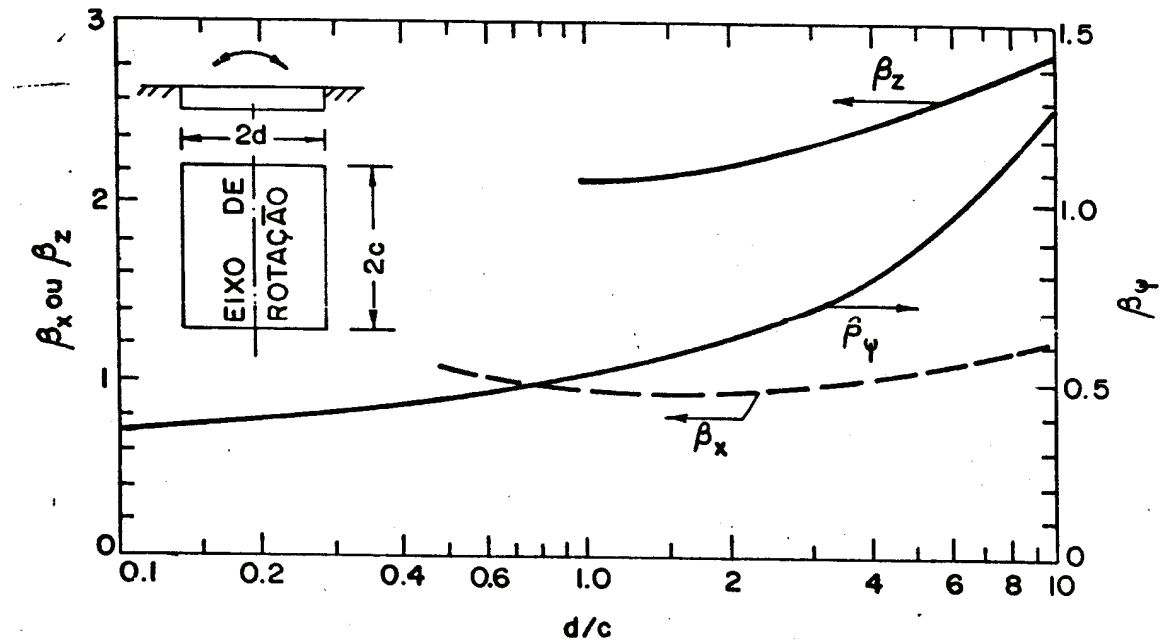
$$K_\theta = 2(1+\nu)G\beta_\theta (c^2 + d^2) \sqrt{cd}$$

Expressões do Luciano Junger de Carvalho [8] para os “ β ”:

$$\beta = \sum_{i=0}^5 a_i (\ln d/c)^i$$

Valores de “i”:	Valores dos “a _i ”		
	β_z	β_x	β_ψ
5	-0,091	-0,008445	-0,0036
4	0,624	0,03943	0,0061
3	-1,578	-0,04823	0,0405
2	1,843	0,06805	0,0276
1	-0,641	-0,04196	0,0824
0	2,16	0,9767	0,5

Graficamente, os “ β ” podem ser obtidos na figura abaixo:



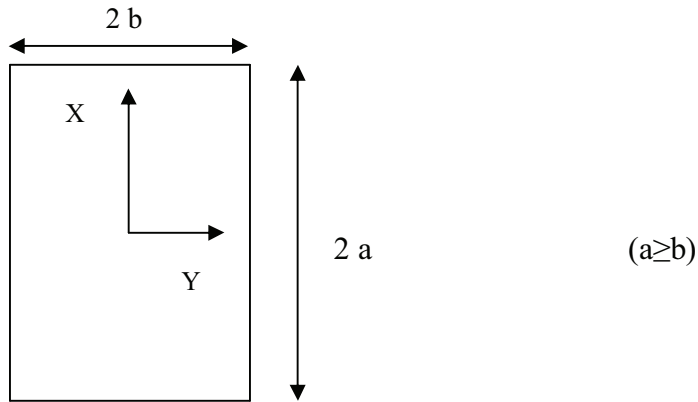
- Raios equivalentes para cálculo dos coeficientes de amortecimento, usando as fórmulas de fundações circulares:

Translações: $r = (4cd/\pi)^{1/2}$

Rotação: $r = (16cd^3/3\pi)^{1/4}$

Torção: $r = [16cd(c^2+d^2)/6\pi]^{1/4}$

- Parâmetros para fundações retangulares (Wolf e Gazetas, ver [20], pg. 33):



$$K_X = \frac{G b}{2 - \nu} \left[6,8 \left(\frac{a}{b} \right)^{0,65} + 2,4 \right]$$

$$K_Y = \frac{G b}{2 - \nu} \left[6,8 \left(\frac{a}{b} \right)^{0,65} + 0,8 \frac{a}{b} + 1,6 \right]$$

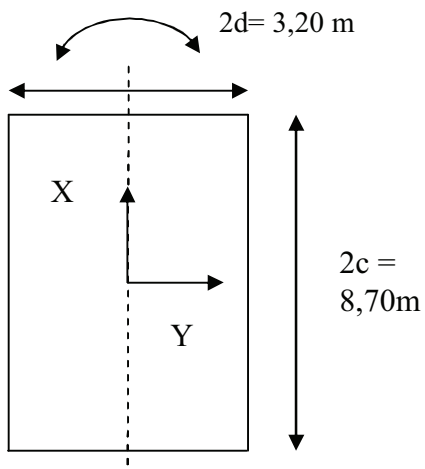
$$K_Z = \frac{G b}{1 - \nu} \left[3,1 \left(\frac{a}{b} \right)^{0,75} + 1,6 \right]$$

$$K_{XX} = \frac{G b^3}{1 - \nu} \left[3,2 \frac{a}{b} + 0,8 \right]$$

$$K_{YY} = \frac{G b^3}{1 - \nu} \left[3,73 \left(\frac{a}{b} \right)^{2,4} + 0,27 \right]$$

$$K_{ZZ} = G b^3 \left[4,25 \left(\frac{a}{b} \right)^{2,45} + 4,06 \right]$$

- Fundação de forma retangular - Exemplo de aplicação – Formulações de Richart e de Wolf



$$G = 30 \text{ MPa}; \rho_s = 1,8 \text{ t/m}^3; \nu = 0,35; M = 167,2 \text{ t}$$

$$I_{\psi XX} = M \cdot \frac{(2d)^2}{12}$$

$$I_{\psi YY} = M \cdot \frac{(2c)^2}{12}$$

$$I_{\theta ZZ} = I_{\psi XX} + I_{\psi YY}$$

$$I_{\psi XX} = 143$$

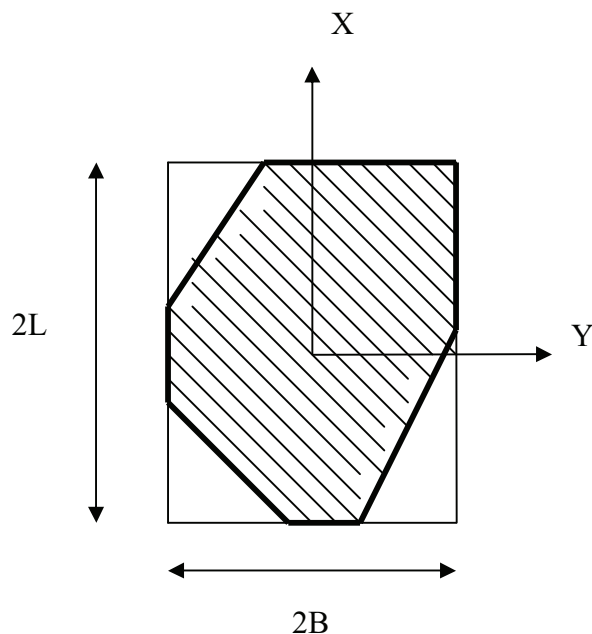
$$I_{\psi YY} = 1055$$

$$I_{\theta ZZ} = 1198$$

Grau de Liberdade	Betas (β)	Coef. de Rigid.(K)	Raios Equiv. (r)	Fração de Massa (B)	Fração de Amortec. (ϵ)	Amort. (C)	Rigidez Form. Wolf
Vertical Z	2,317	564.246	2,977	0,572	0,562	10.772	602.846
Horizontal X	0,986	421.402	2,977	0,711	0,342	5.864	448.789
Horizontal Y	0,98	418.838	2,977	0,711	0,342	5.864	488.789
Rotacional XX	0,414	1.702.266	2,345	0,272	0,226	6.799	1.795.938
Rotacional YY	0,653	7.299.776	3,867	0,165	0,317	54.896	7.827.162
Torsional ZZ	0,983	4.512.612	3,356	1,561	0,121	20.650	6.553.345

(Considerou-se o “ β ” da direção torsional como igual ao médio entre os das direções horizontais X e Y).

- Fundação de dimensão qualquer (Wolf e Gazetas):



$$K_z = \frac{2GL}{1-\nu} \left[0,73 + 1,54 \cdot \left(\frac{Ab}{4L^2} \right)^{0,75} \right]$$

$$K_y = \frac{2GL}{2-\nu} \left[2 + 2,5 \left(\frac{Ab}{4L^2} \right)^{0,85} \right]$$

$$K_x = K_y - \frac{0,2}{0,75-\nu} GL \left[1 - \frac{B}{L} \right]$$

$$K_{xx} = \frac{G}{1-\nu} (I_{bx})^{0,75} \left(\frac{L}{B} \right)^{0,25} \left(2,4 + 0,5 \frac{B}{L} \right)$$

$$K_{yy} = \frac{2,9G}{1-\nu} (I_{by})^{0,75} \left(\frac{L}{B} \right)^{0,15}$$

$$K_{zz} = 3,5G \cdot (I_{bz})^{0,75} \left(\frac{B}{L} \right)^{0,4} \left(\frac{I_{bz}}{B^4} \right)^{0,2}$$

(A_b é a área da fundação, circunscrita por um retângulo de cujo lado maior é $2L$ e o menor é $2B$, I_{bx} é o menor momento de inércia e I_{by} é o maior momento de inércia).

- Aplicação da formulação de Gazetas no exemplo de fundação retangular

A formulação de Gazetas é comparada com a de Richart, analisando-se pela formulação de Gazetas a fundação retangular analisada acima.

$$\underline{A}_b = 27,84 \text{ m}^2; B = 1,6\text{m}; L = 4,35\text{m}$$

Unidades: kN, m.

$$I_{bx} = \frac{4}{3} B^3 L = 23,757 \text{ m}^4$$

$$I_{by} = \frac{4}{3} BL^3 = 175,601 \text{ m}^4$$

$$I_{bz} = I_{bx} + I_{by} = 199,358 \text{ m}^4$$

$$K_x = 444112 \text{ kN} / \text{m}$$

$$K_y = 485362 \text{ kN} / \text{m}$$

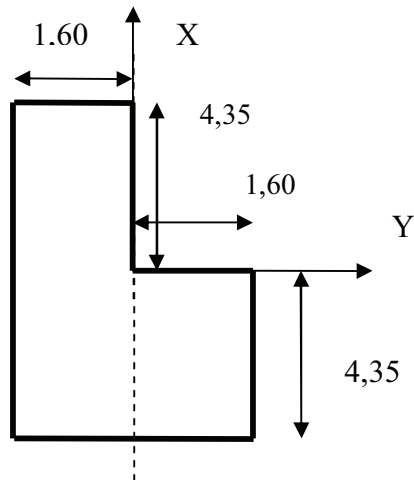
$$K_z = 585182 \text{ kN} / \text{m}$$

$$K_{xx} = 1647852 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$K_{yy} = 7501639 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$K_{zz} = 7392592 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- Fundação de forma qualquer - Exemplo de aplicação



$$A_b = 20,88 \text{ m}^2; B = 1,6\text{m}; L = 4,35\text{m}$$

Unidades: kN, m. $h_{\text{bloco}} = 1,60\text{m}$.

Inércias e raios equivalentes:

$$I_{bx} = 16,333\text{m}^4; r_x = r_y = r_z = 2,578\text{m}$$

$$I_{by} = 120,726\text{m}^4; r_{xx} = 2,135\text{m}; r_{yy} = 3,521\text{m}; r_{zz} = 3,056\text{m};$$

$$I_{bz} = 137,058\text{m}^4$$

Coefficientes de rigidez e de amortecimento:

$$K_x = 407452 \text{ kN/m}; C_x = 4397 \text{ kN.s/m}$$

$$K_y = 448702 \text{ kN/m}; C_y = 4397 \text{ kN.s/m}$$

$$K_z = 528502 \text{ kN/m}; C_z = 8078 \text{ kN.s/m}$$

$$K_{xx} = 1244150 \text{ kN.m}; C_{xx} = 4952 \text{ kN.s.m}$$

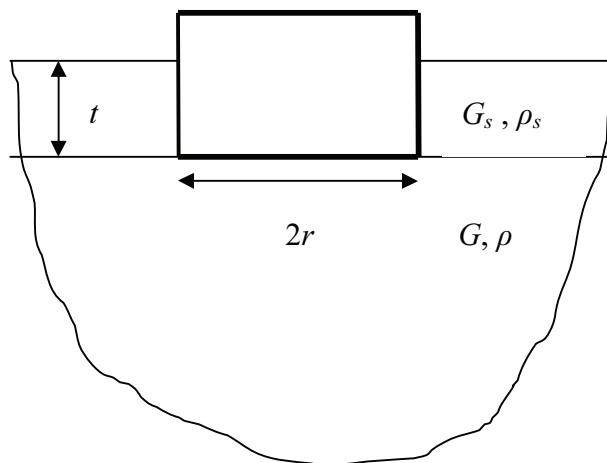
$$K_{yy} = 5663836 \text{ kN.m}; C_{yy} = 39213 \text{ kN.s.m}$$

$$K_{zz} = 5178522 \text{ kN.m}; C_{zz} = 15235 \text{ kN.s.m}$$

3.2 Fundações Parcialmente Enterradas no Solo

As soluções de Novak estão automatizadas no programa PILAY.

Simplificadamente, as soluções de Novak para molas e amortecedores adicionais aos do semi-espaço (fundação circular) são:



$$\begin{aligned}
Kz_1 &= 2,7.G_s.t & Cz_1 &= 6,7.r.t.\sqrt{G_s.\rho_s} \\
Kx_1 &= 4,0.G_s.t & Cx_1 &= 9,1.r.t.\sqrt{G_s.\rho_s} \\
K\psi_1 &= 2,5.G_s.t.r^2 & C\psi_1 &= 1,8.r^3.t.\sqrt{G_s.\rho_s} \\
K\theta_1 &= 10,2.G_s.t.r^2 & C\theta_1 &= 5,4.r^3.t.\sqrt{G_s.\rho_s}
\end{aligned}$$

- Exemplo, com a aplicação das fórmulas acima:

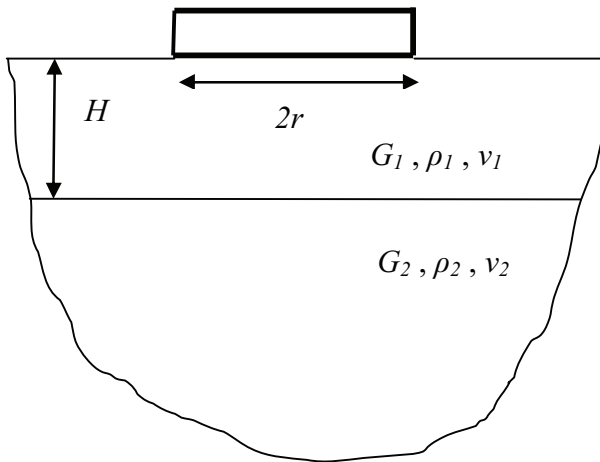
$$\begin{aligned}
G &= G_s = 48050 \text{ KPa}; \rho = \rho_s = 2,00 \text{ t/ m}^3; \nu_s = 0,3 \\
M &= 167,2\text{t}; t = 1,00\text{m}; r = 3,00\text{m}; \rho_c = 2,50 \text{ t/ m}^3; \nu_c = 0,25 \\
Kz_1 &= 129735 \text{ kN / m} & Kz &= 953449 \text{ kN / m} \\
Cz_1 &= 6231 \text{ kN.s / m} & Cz &= 19782 \text{ kN.s / m} \\
Kx_1 &= 192200 \text{ kN / m} & Kx &= 894148 \text{ kN / m} \\
Cx_1 &= 8463 \text{ kN.s / m} & Cx &= 16275 \text{ kN.s / m} \\
K\psi_1 &= 1081125 \text{ kN.m} & K\psi &= 6023411 \text{ kN.m} \\
C\psi_1 &= 15066 \text{ kN.s.m} & C\psi &= 38917 \text{ kN.s.m} \\
K\theta_1 &= 4410990 \text{ kN.m} & K\theta &= 11330190 \text{ kN.m} \\
C\theta_1 &= 45198 \text{ kN.s.m} & C\theta &= 62812 \text{ kN.s.m}
\end{aligned}$$

- Mesmo exemplo, com a utilização do programa PILAY:

São comparáveis os valores de rigidez em baixas frequências e dos amortecedores, em alta frequência. Na página seguinte, listagem do PILAY.

3.3 Fundações Sobre Solo Estratificado Horizontalmente

São apresentadas a seguir soluções numéricas obtidas a partir da formulação desenvolvida por Luco, para o caso particular de somente uma camada sobre o semi-espaço:



1-----
 INPUT DATA PROBLEM NO. 1

NE= 1 TL= 1.00 VST= 155.000

EP= 0.9000E+09 PST= 0.0000E+00 GMP= 25.00 GAC= 10.00 PRP= 0.25 SHFC= 1.334
 LAYER TH(I) VS(I) GMS(I) PR(I) TDL(I) RO(I) PAR(I) PIN(I) PTJ(I)
 1 1.00 155.00 20.00 0.300 0.100 3.000 0.2830E+02 0.6360E+02 0.1272E+03
 SOIL BELOW TIP 155.00 20.00 0.300 0.100

DIMENSIONLESS RATIOS

VST/VC= 0.0082 VB/VST= 1.0000 SQRGT GT/EP= 0.0073 TL/RO= 0.33

 OUTPUT DATA PROBLEM NO. 1 FREQUENCY NO. 1 OMG= 1.000 AOT=
 0.0194

STIFFNESS AND DAMPING PARAMETERS

PINNED

FW1	FT1	FU1	FP1	FC1	FN1	
0.10945E-03	0.78855E-03	0.39392E-03	0.36420E-03	-0.11890E-03	0.35513E-03	
FW2	FT2	FU2	FP2	FC2	FN2	
0.62508E-03	0.25287E-02	0.21479E-02	0.15917E-02	-0.66810E-03	0.18811E-02	

STIFFNESS AND DAMPING CONSTANTS K1 C1

PINNED

KWW	KZT	KUU	KPP	KPU	KUN	
0.92921E+06	0.12036E+08	0.83510E+06	0.69489E+07	-0.75623E+06	0.75289E+06	
CWW	CZT	CUU	CPP	CPU	CUN	
0.10271E+06	0.74707E+06	0.88131E+05	0.58780E+06	-0.82240E+05	0.77185E+05	

 OUTPUT DATA PROBLEM NO. 1 FREQUENCY NO. 2 OMG= 100.000 AOT=
 1.9355

STIFFNESS AND DAMPING PARAMETERS

PINNED

FW1	FT1	FU1	FP1	FC1	FN1	
-0.47571E-05	0.38447E-03	0.38770E-04	0.13969E-03	-0.56476E-04	0.20708E-04	
FW2	FT2	FU2	FP2	FC2	FN2	
0.13359E-03	0.28312E-03	0.43868E-03	0.18360E-03	-0.11057E-03	0.37305E-03	

STIFFNESS AND DAMPING CONSTANTS K1 C1

PINNED

KWW	KZT	KUU	KPP	KPU	KUN	
-0.40387E+05	0.58685E+07	0.82192E+05	0.26652E+07	-0.35919E+06	0.43902E+05	
CWW	CZT	CUU	CPP	CPU	CUN	
0.21951E+05	0.83644E+05	0.18000E+05	0.67802E+05	-0.13610E+05	0.15307E+05	

- Rigidez estática, fundação circular: Ref: Gazetas [23],

Table 3. Static stiffnesses of rigid circular foundation on a stratum-over-rigid-base*

Type of loading	Static stiffness	Range of validity†	Soil profile
Vertical:	$K_v = \frac{4GR}{1-\nu} \left(1 + 1.28 \frac{R}{H}\right)$	$H/R > 2$	
Horizontal:	$K_h = \frac{8GR}{2-\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{H}\right)$	$H/R > 1$	
Rocking:	$K_r = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{H}\right)$	$4 > H/R > 1$	
Torsion:	$K_t = \frac{16}{3} GR^3$	$H/R > 1.25$	

Table 5. Static stiffnesses of circular foundations on a stratum-over-halfspace*

Type of loading	Static stiffness*	Range of validity	Profile
Vertical:	$\frac{4G_1 R}{1-\nu_1} \cdot \frac{1 + 1.28 \frac{R}{H}}{1 + 1.28 \frac{R}{H} \frac{G_1}{G_2}}$	$1 < \frac{H}{R} < 5$	
Horizontal:	$\frac{8G_1 R}{2-\nu_1} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{R}{H}}{1 + \frac{1}{2} \frac{R}{H} \frac{G_1}{G_2}}$	$1 < \frac{H}{R} < 4$	
Rocking:	$\frac{8G_1 R^3}{3(1-\nu_1)} \cdot \frac{1 + \frac{1}{6} \frac{R}{H}}{1 + \frac{1}{6} \frac{R}{H} \frac{G_1}{G_2}}$	$0.75 < \frac{H}{R} < 2$	

Table 8. Static stiffnesses of rigid embedded cylindrical foundations 'welded' into a homogeneous soil stratum-over-bedrock*

Type of loading	Static stiffness	Profile
Vertical	$\frac{4GR}{1-\nu} \left(1 + 1.28 \frac{R}{H}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D}{R}\right) \left(1 + \left[0.85 - 0.28 \frac{D}{R}\right] \frac{D/H}{1-D/H}\right)$	
Horizontal	$\frac{8GR}{2-\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{H}\right) \left(1 + \frac{2}{3} \frac{D}{R}\right) \left(1 + \frac{5}{4} \frac{D}{H}\right)$	
Rocking	$\frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{H}\right) \left(1 + 2 \frac{D}{R}\right) \left(1 + 0.7 \frac{D}{H}\right)$	
Coupled horizontal-rocking	$0.40 K_h D$	
Torsion	$\frac{16}{3} GR^3 \left(1 + 2.67 \frac{D}{R}\right)$	

Range of validity:
 $\frac{D}{R} < 2$
 $\frac{D}{H} \leq 0.5^\dagger$

- Freqüência de ressonância, sentido vertical:

$$f_r = \frac{1}{4H} \sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad T = \frac{4H}{V_p}$$

- Exemplo de aplicação:

$$G_1 = 100000 \text{ kN/m}^2 \quad \rho_1 = 2 \text{ t/m}^3 \quad \nu_1 = 0,25 \quad H = 2\text{m} \quad f_R = 48,4 \text{ Hz}$$

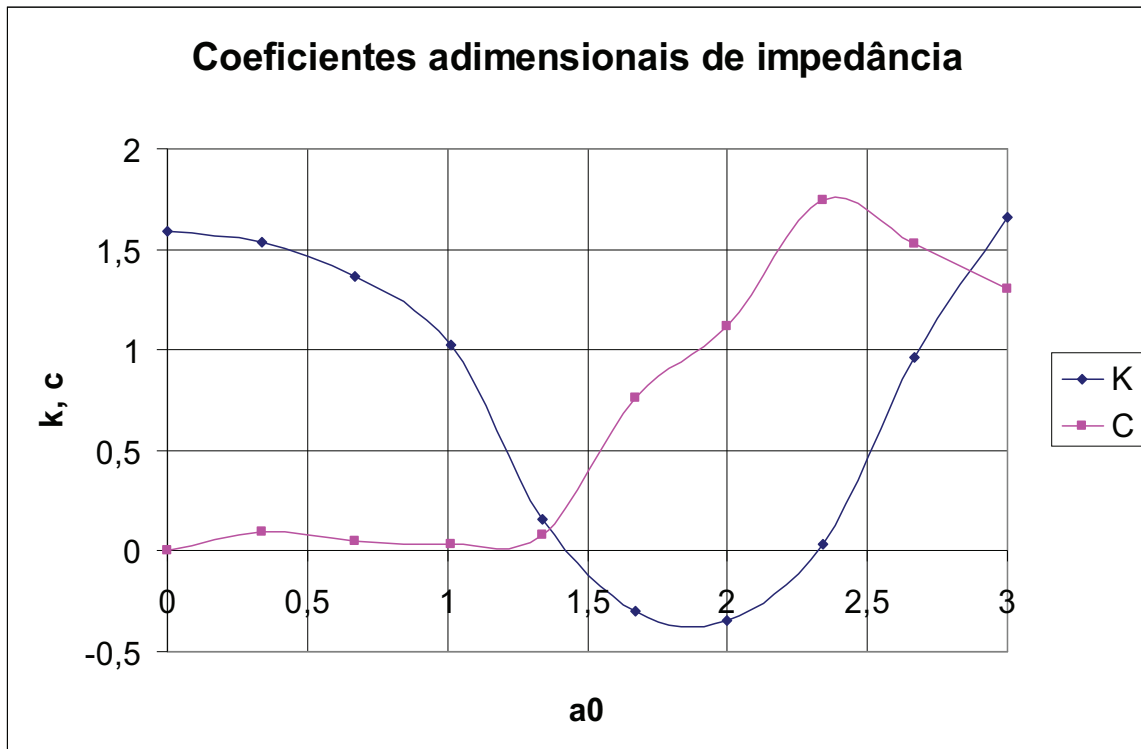
$$\omega_1 r = V_{S1} a_0$$

$$\omega_1 = 2\pi \cdot 48,4 = 304 \text{ rad/s} \quad r = 1\text{m} \quad V_{S1} = 224 \text{ m/s} \quad a_0 = 1,36$$

Pode-se escrever a rigidez complexa (mola + amortecedor), como:

$$K_{\text{COMPL}} = \frac{4G r}{1 - \nu} (k + i a_0 c)$$

Com k e c mostrados como na figura a seguir (Luco, 1974).



Pode-se considerar que:

- Para $H/r \leq 0,5$ – adotar soluções do semi-espaço, com G_2, ρ_2, ν_2
- Para $H/r \geq 5$ – adotar soluções do semi-espaço, com G_1, ρ_1, ν_1
- Para $0,5 \leq H/r \leq 5$ – considerar soluções dependentes da freqüência

- Soluções dependentes da frequência

São discutidas somente soluções de uma camada sobre semi-espço infinito.

Define-se inicialmente um G equivalente (G_{equiv}) a ser aplicado a um semi-espço infinito com este G equivalente, que reproduz o deslocamento vertical do solo estratificado. Usa-se a solução dada na tabela da pg. 47.

$$G_{equiv} = \frac{1 + 1,28 \frac{\alpha}{h}}{1 + 1,28 \frac{\alpha G_1}{h G_2}} G_1$$

São então determinados os coeficientes de rigidez K e de amortecimento C do solo, considerando este G_{equiv} e os demais parâmetros da primeira camada (ρ_1 e v_1). Considera-se então uma redução do amortecimento de radiação devido à reflexão na interface entre as camadas. Reduz-se o coeficiente de amortecimento multiplicando-o pelo fator $1/\alpha$ definido abaixo:

$$\frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{G_1 \cdot \rho_1}{G_2 \cdot \rho_2}}$$

Isto é equivalente a calcular os amortecedores considerando uma massa equivalente ρ_{equiv} igual a:

$$\rho_{equiv} = \rho_1 \cdot (1/\alpha)^2$$

- Exemplo de aplicação

Considerar os dados abaixo, que correspondem ao Caso 2 estudado por Luco (1978):

$$G_1 = 100000 \text{ kN/m}^2; G_2 = 183824 \text{ kN/m}^2; \rho_1 = 1,7 \text{ t/m}^3; \rho_2 = 2,0 \text{ t/m}^3$$

$$v_1 = 0,30; v_2 = 0,25; h = 2,0 \text{ m}; r = 1,0 \text{ t/m}^3$$

São consideradas duas alternativas para a massa da fundação:

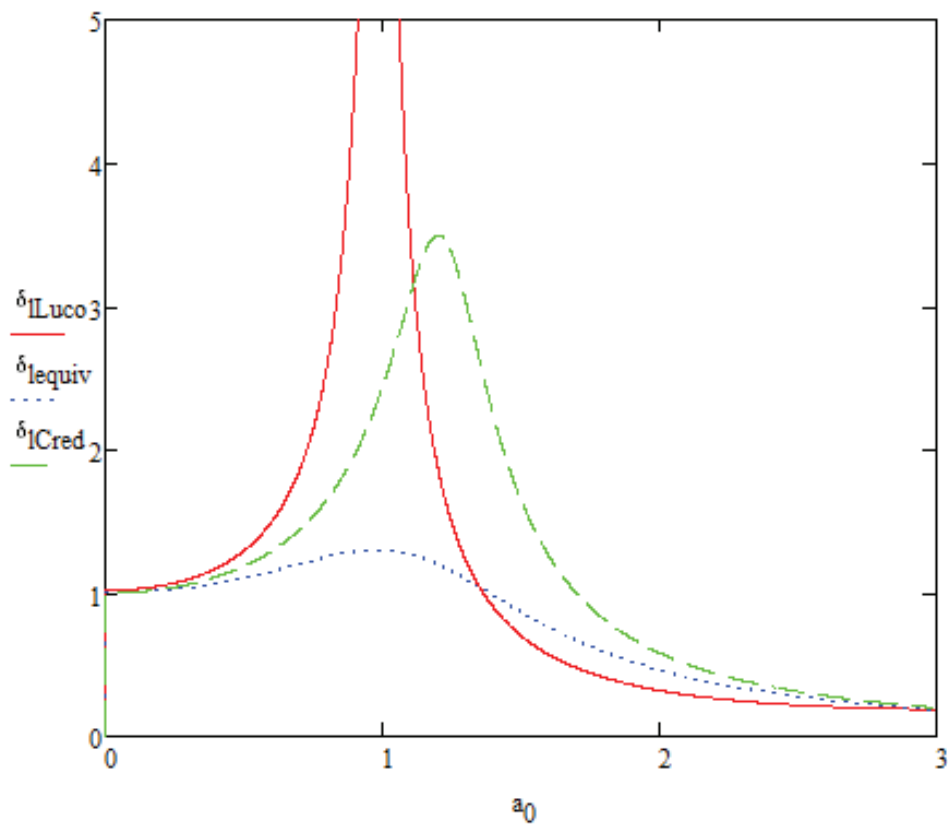
$$M_{leve} = 9,1\text{t}; M_{pesada} = 45,3\text{t}$$

Estes valores correspondem a massas adimensionais iguais a $BZ = 1$ e $BZ = 5$ de acordo com a definição de Richart (em seu item 7.4, pg. 206):

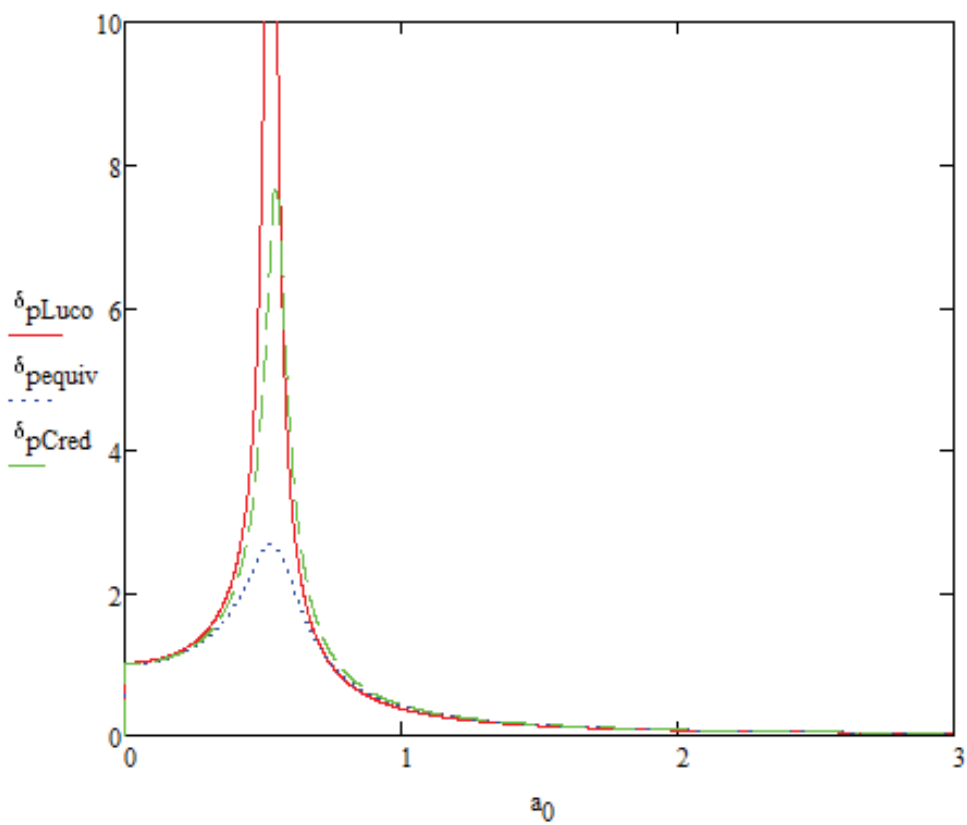
$$BZ = \frac{(1-v)M}{4\rho r^3}$$

São apresentados, nas figuras da página seguinte, resultados de amplificação dinâmica, relativa aos resultados estáticos obtidos com o G_{equiv} para três diferentes hipóteses:

- δ_{ILuco} e δ_{pLuco} : amplificações dinâmicas obtidas utilizando os parâmetros exatos de Luco para as fundações leve e pesada, respectivamente;
- δ_{Iequiv} e δ_{pequiv} : amplificações dinâmicas obtidas considerando solo homogêneo, com coeficientes de rigidez e amortecimento obtidos com o G_{equiv} , para as fundações leve e pesada, respectivamente;
- δ_{ICred} e δ_{pCred} : amplificações dinâmicas considerando o mesmo solo homogêneo, mas com coeficientes de amortecimento reduzidos com o fator $1/\alpha$ para as fundações leve e pesada, respectivamente.



Curvas de amplificação dinâmica vs. frequência adimensional de uma fundação leve com $h/r = 2,0$.



Curvas de amplificação dinâmica vs. frequência adimensional de uma fundação pesada com $h/r = 2,0$.