

### 3.4 Fundações em Estacas. Estacas Isoladas e Consideração do Efeito de Grupo

São apresentadas, a seguir, as formulações de Poulos e de Novak, esta implementada no programa PILAY para a análise dinâmica de fundações sobre estacas.

- Estacas isoladas, de acordo com Poulos:
    - Rigidez vertical, estacas “flutuantes” (sem restrição de deslocamento na ponta)
- A rigidez é dada por:

$$K_V = \frac{E_S L}{I_P} \quad E_S - E \text{ do solo, } E_P - E \text{ da estaca,}$$

$L, d$  – comprimento e diâmetro da estaca

$I_P$  é obtido da Fig. 13.12 de Poulos, em função de  $L/d$  e do parâmetro  $K$ :

$$K = E_P / E_S$$

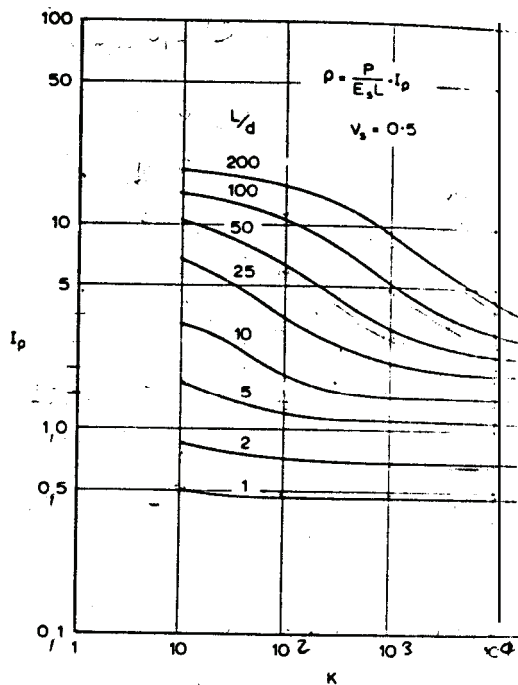


FIG.13.12 Displacement influence factors : : compressible floating pile (Mattes : : Poulos, 1969).

Uma expressão aproximada para a rigidez vertical de estaca longa (Roesset [21],pg.79) é dada por:

$$K_V = 0,56 \frac{E_P A_P}{r} 0,866 \left( \frac{E_S}{E_P} \right)^{0,5} ; r - \text{raio da estaca.}$$

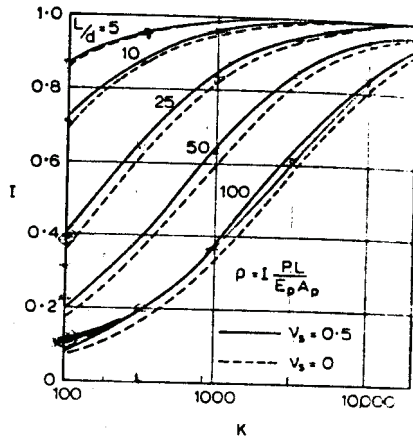
(o que corresponde a  $k_v = 0,739.E_S$  ;  $K_V = \frac{k_v}{\lambda}$  ;  $\lambda = \sqrt{\frac{k_v}{E_P \cdot A_P}}$  e a  $I_P = \frac{1,316}{\sqrt{K}} \cdot \frac{L}{d}$ )

- Rigidez vertical, estacas “de ponta” (com restrição de deslocamento vertical na ponta)
- A rigidez é dada por:

$$K_V = \frac{E_P A_P}{I.L} \quad E_P - E \text{ da estaca}$$

$L, A_P$  – comprimento e área da seção transversal da estaca

$I$  é obtido da Fig. 13.30 de Poulos, em função de  $L/d$  e do parâmetro  $K$ .



3.13.30 Displacement at top of end-bearing ;

- Rigidez horizontal, estacas de atrito (“flutuantes”, ou seja, sem restrição de deslocamento na ponta), para rotação nula no topo da estaca.

A rigidez é dada por:

$$K_H = \frac{E_S L}{I_{PF}}$$

$I_{PF}$  é obtido da Fig. 14.4 de Poulos, em função de  $L/d$  e do parâmetro  $K_R$

$$K_R = \frac{E_P \cdot I_P}{E_S \cdot L^4} \quad I_P - \text{Momento de inércia da estaca}$$

As expressões completas para deslocamentos horizontais e rotações ( $\rho$  e  $\theta$ ), em função das forças horizontais e momentos ( $H$  e  $M$ ), usando-se os parâmetros das Figs. 14.2, 14.3 e 14.5 (estacas de atrito) e 14.11, 14.12 e 14.14 (estacas de ponta fixa ou rotulada) de Poulos são:

$$\rho = I_{\rho H} \cdot \frac{H}{E_S \cdot L} + I_{\rho M} \cdot \frac{M}{E_S \cdot L^2}$$

$$\theta = I_{\theta H} \cdot \frac{H}{E_S \cdot L^2} + I_{\theta M} \cdot \frac{M}{E_S \cdot L^3}$$

Uma expressão aproximada para a rigidez horizontal de estaca longa (Roesset, [21], pg.79) é:

$$K_H = \frac{2 \cdot E_P \cdot I_P}{r^3} \left( \frac{E_S}{E_P} \right)^{0,75}$$

(o que corresponde a  $k_H = 1,246 \cdot E_S$ ;  $K_H = \frac{k_H}{\lambda}$ ;  $\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_H}{4 \cdot E_P \cdot I_P}}$  e a  $I_{pf} = 0,6 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{K_R}}$ )

- Rigidez horizontal, estacas “de ponta” (com ponta rotulada ou engastada), para rotação nula no topo da estaca.

A rigidez é dada por:

$$K_H = \frac{E_S L}{I_{PF}}$$

$I_{PF}$  é obtido da Fig. 14.4 (estacas de atrito) e 14.13 (estacas de ponta fixa ou rotulada) de Poulos, em função de  $L/d$  e de  $K_R$ .

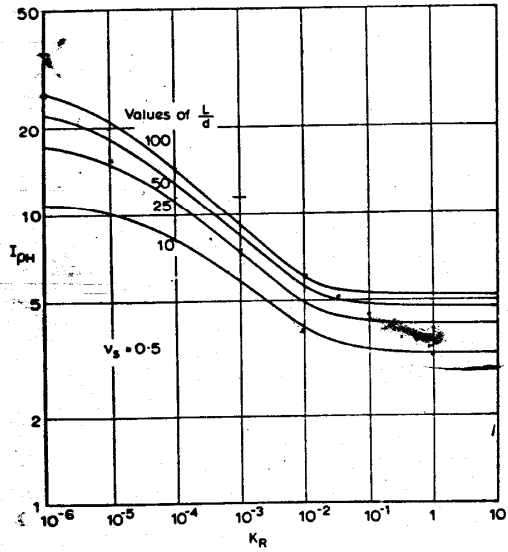


FIG.14.2 Influence factor  $I_{\rho H}$  for free-head pile.

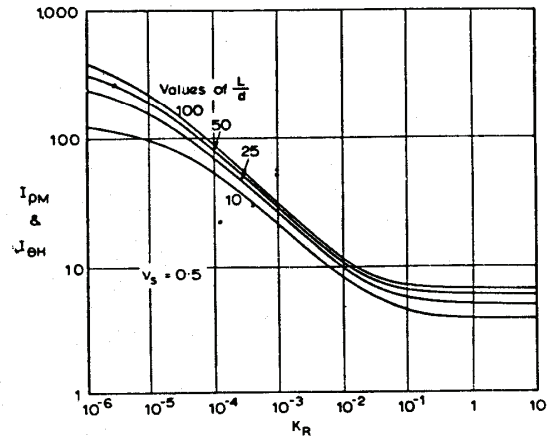


FIG.14.3 Influence factors  $I_{\theta H}$  and  $I_{\rho M}$  for free-head pile.

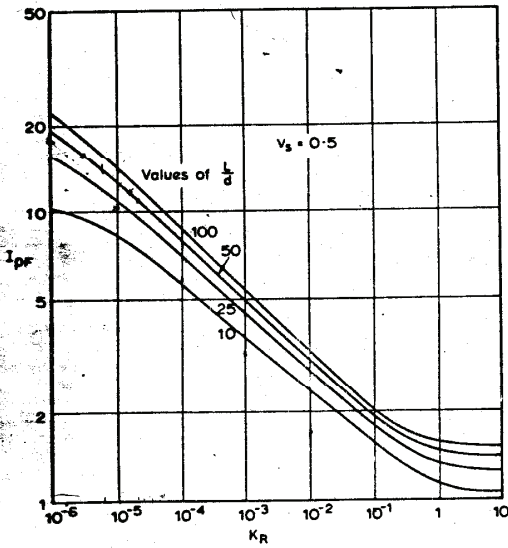


FIG.14.4 Influence factor  $I_{\rho F}$  for fixed-head pile.

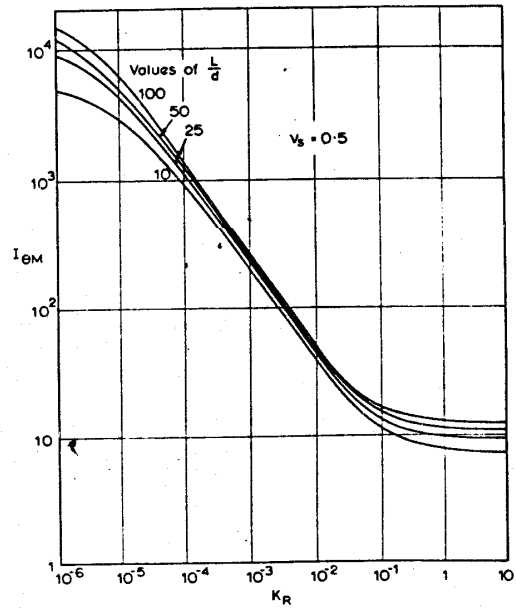


FIG.14.5 Influence factor  $I_{\theta M}$  for free-head pile.

("Free-tip")

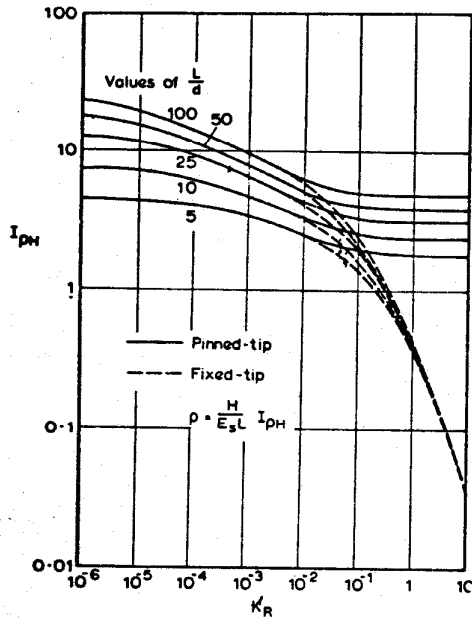


FIG.14.11 Influence factor  $I_{\rho H}$  for free-head pile.

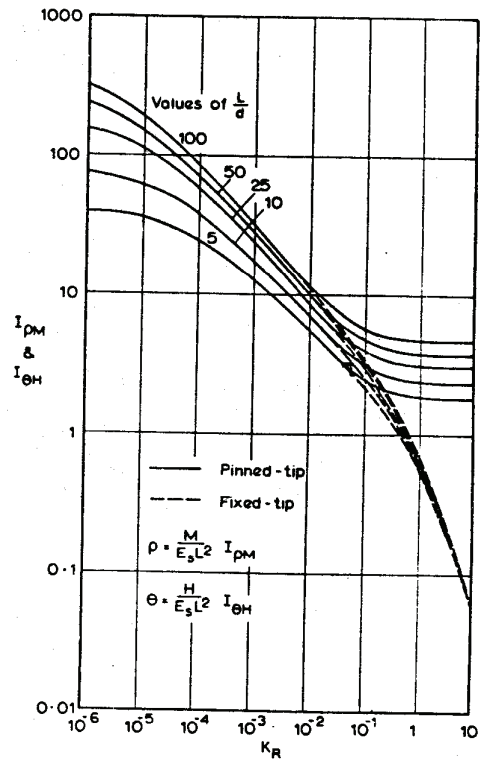


FIG.14.12 Influence factors  $I_{\rho M}$  and  $I_{\theta H}$  free-head pile.

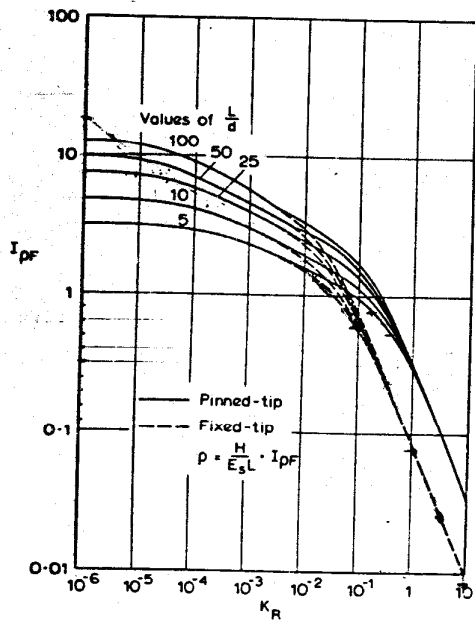


FIG.14.13 Influence factor  $I_{\rho F}$  for fixed-head pile.

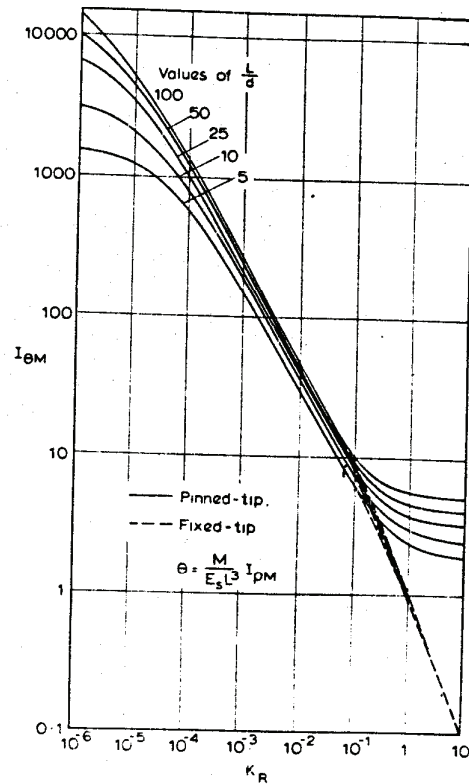
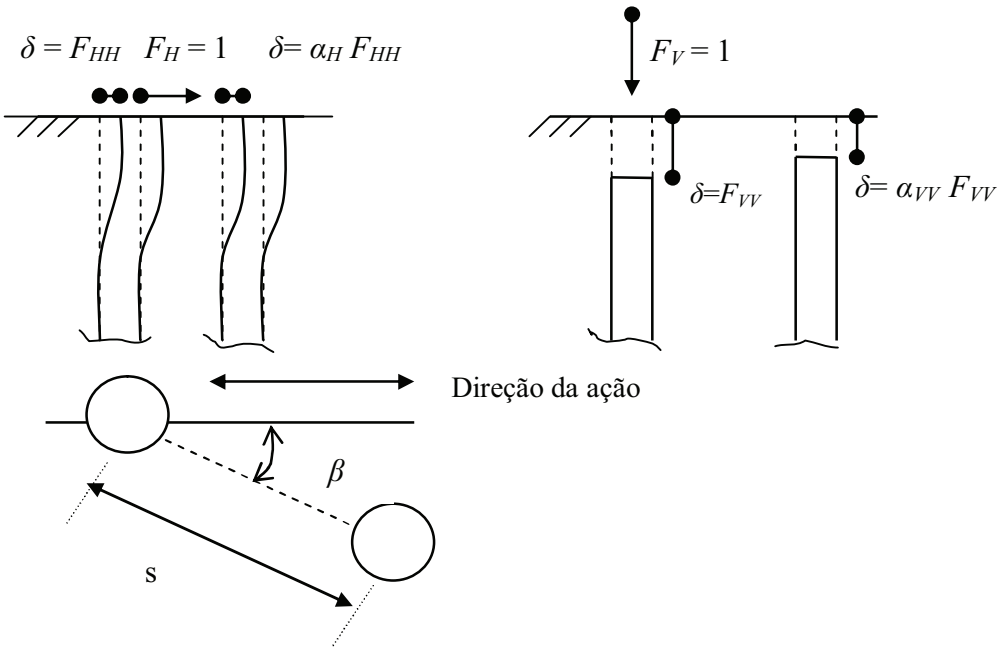


FIG.14.14 Influence factor  $I_{\theta M}$  for free-head

(“Pinned-tip” e “Fixed-tip”)

- Formulação do efeito de grupo, de acordo com Poulos:



No caso de duas estacas:

$$\mathbf{F} = F \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{F} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha^2} & \frac{-\alpha}{1-\alpha^2} \\ \frac{-\alpha}{1-\alpha^2} & \frac{1}{1-\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Em um exemplo em que  $\alpha = 0,5$ , teremos:

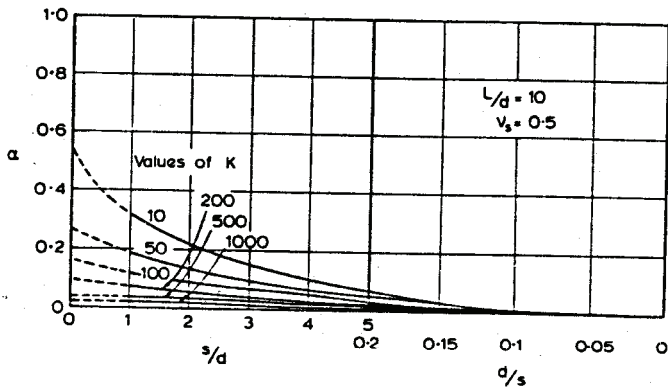
$$\mathbf{K} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} 1,333 & -0,666 \\ -0,666 & 1,333 \end{pmatrix}$$

- Para efeito de grupo no sentido vertical:

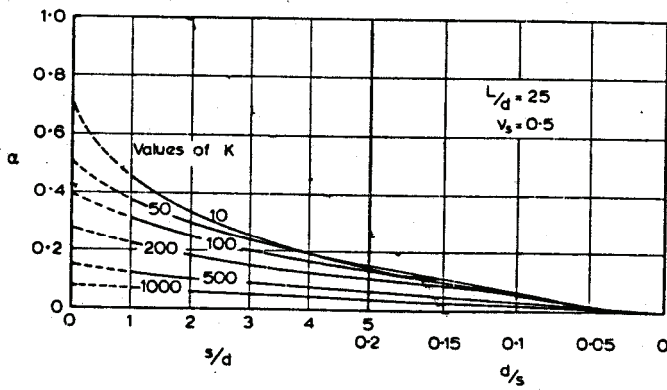
Os fatores “ $\alpha$ ” são dados na Figs. 13.36 de Poulos para estacas de ponta.

- Para efeito de grupo, no sentido horizontal:

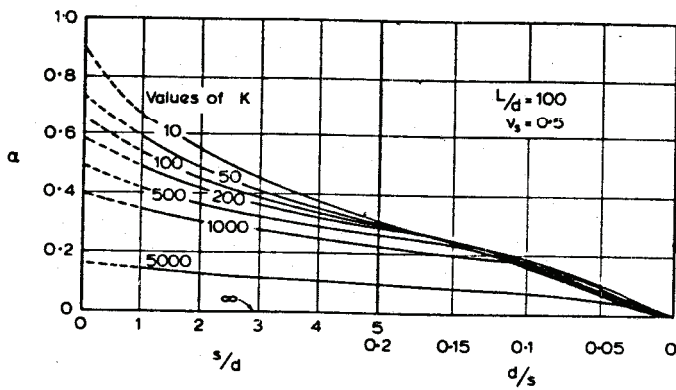
Os fatores “ $\alpha$ ” são dados na Figs. 14.30 a 14.33 de Poulos, para estacas de atrito (flutuantes), com rotação nula no topo da estaca.



(a)  $L/d = 10$



(b)  $L/d = 25$



(c)  $L/d = 100$

FIG.13.36 Interaction factors for two end-bearing piles resting on a rigid bearing stratum.

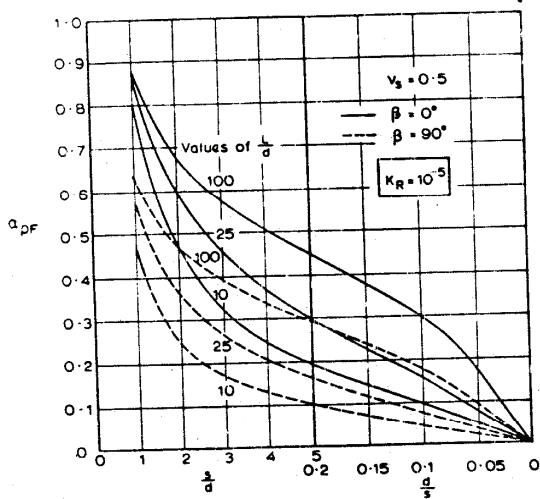


FIG.14.30 Interaction factor  $\alpha_{pF}$ .  
 $K_R = 10^{-5}$

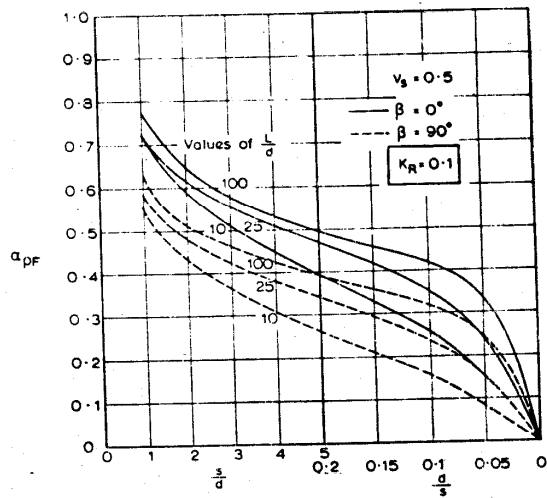


FIG.14.32 Interaction factor  $\alpha_{pF}$ .  
 $K_R = 0.1$

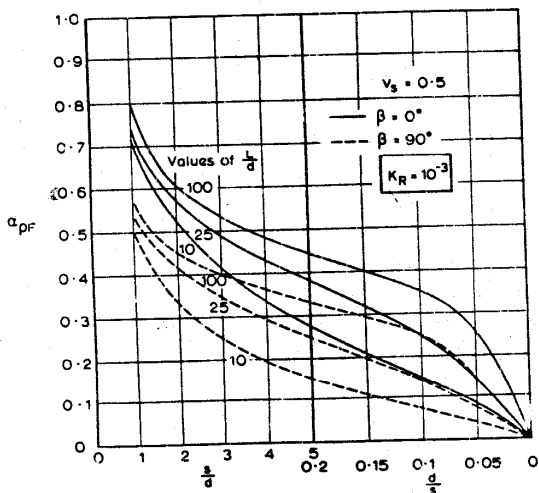


FIG.14.31 Interaction factor  $\alpha_{pF}$ .  
 $K_R = 10^{-3}$

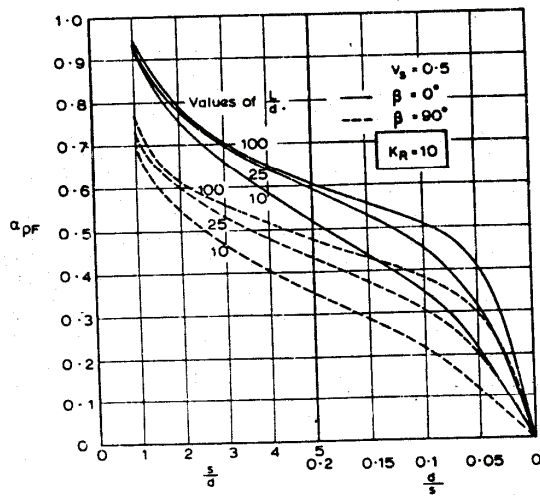


FIG.14.33 Interaction factor  $\alpha_{pF}$ .  
 $K_R = 10$

Uma avaliação muito aproximada do fator "alpha" (Gazetas, [22], pg.1534) é dada por:

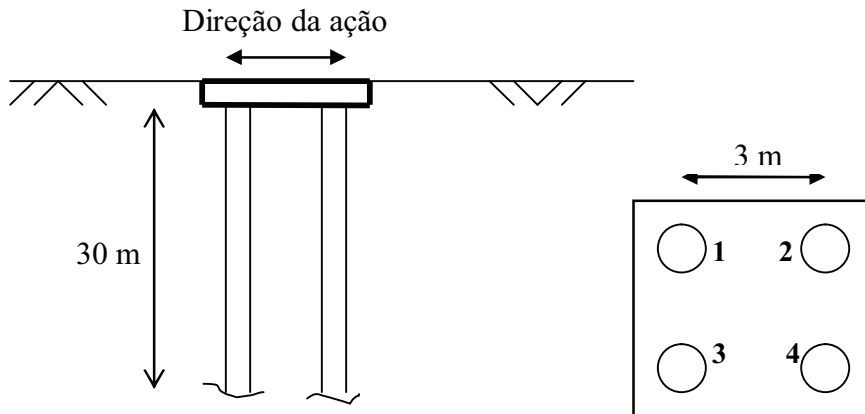
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{2s}{d}}}$$

- Exemplo numérico de avaliação de rigidez horizontal de um grupo de estacas, resolução manual pelo Poulos

São utilizadas as Figs. 14.4 e 14.30 do Poulos. Dados:

$$E_{\text{solo}} = 1,2 \times 10^5 \text{ kN/m}^2 \quad \nu = 0,3 \quad \rho = 2,0 \text{ t/m}^3$$

Estacas de concreto ( $E_p = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ ) com  $\varphi = 80 \text{ cm}$  ( $I_p = \frac{\pi \cdot 0,8^4}{4} = 0,02 \text{ m}^4$ )



- Estaca isolada (no exemplo, são estacas de atrito, com rotação impedida no topo)

$$K_R = \frac{E_P I_P}{E_S L^4} = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 0,02}{1,2 \cdot 10^5 \cdot 30^4} = 6,17 \cdot 10^{-6} \quad (\text{para } L/D = 38, I_{PF} \approx 13)$$

$$K_H = \frac{E_S L}{I_{PF}} = 2,77 \cdot 10^5 \text{ kN/m}$$

Verificando pela fórmula de Roesset:

$$K_H = 2,98 \cdot 10^5 \text{ kN/m}$$

Pelo PILAY:

$$K_H = 294070 \text{ kN/m}$$

- Estacas em grupo

Coefficientes de interação ( $\alpha_{HH}$ ) para  $K_R = 10^{-5}$

s/d	$\beta$	L/D	$\alpha_{HH}$
3,75	0°	38	0,42
3,75	90°	38	0,24
5,3	45°	38	0,26

Matriz dos coeficientes adimensionais de flexibilidade global:

$$f_{11} := \begin{pmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,24 & 0,26 \\ \mathbf{0,42} & 1,00 & 0,26 & 0,24 \\ 0,24 & 0,26 & 1,00 & 0,42 \\ 0,26 & 0,24 & 0,42 & 1,00 \end{pmatrix}$$

Matriz dos coeficientes adimensionais de rigidez global:

$$k_{11} = \begin{pmatrix} 1,27 & -0,46 & -0,11 & -0,17 \\ -0,46 & 1,27 & -0,17 & -0,11 \\ -0,11 & -0,17 & 1,27 & -0,46 \\ -0,17 & -0,11 & -0,46 & 1,27 \end{pmatrix}$$



$$K = F^{-1}$$

Para cada estaca:

$$K_{CH} = K_H(1,27 \ -0,46 \ -0,11 \ -0,17) = 0,53 K_H$$

Para o grupo:

$$K_{GRUPO} = 4 K_C = 4 \cdot 0,53 \cdot 2,77 \cdot 10^5 = 5,87 \cdot 10^5 \text{ kN/m}$$

- Mesmo exemplo numérico, rigidez vertical, resolução manual pelo Poulos

Para o mesmo exemplo numérico, é calculada a rigidez vertical do grupo de estacas. São utilizadas as Fig. 13.12 e 13.36 do Poulos.

- Estaca isolada (no exemplo, estacas de atrito):

$$K = \frac{E_p}{E_s} = \frac{3 \cdot 10^7}{1,2 \cdot 10^5} = 250 \quad (\text{para } L/D = 38, I_p \approx 3,35)$$

$$K_V = \frac{E_s L}{I_p} = 1,07 \cdot 10^6 \text{ kN/m}$$

Verificando pela fórmula de Roesset:

$$K_V = 1,15 \cdot 10^6 \text{ kN/m}$$

Pelo PILAY:

$$K_V = 1228100 \text{ kN/m}$$

- Estacas em grupo

Coefficientes de interação ( $\alpha_{VV}$ ) para  $K = 250$ :

s/d	L/D	$\alpha_{VV}$
3,75	38	0,18
5,3	38	0,15

Matriz dos coeficientes adimensionais de flexibilidade global:

$$f_{11} := \begin{pmatrix} 1 & .18 & .18 & .15 \\ .18 & 1 & .15 & .18 \\ .18 & .15 & 1 & .18 \\ .15 & .18 & .18 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz dos coeficientes adimensionais de rigidez global:

$$k_{11} = \begin{pmatrix} 1.07 & -0.15 & -0.15 & -0.11 \\ -0.15 & 1.07 & -0.11 & -0.15 \\ -0.15 & -0.11 & 1.07 & -0.15 \\ -0.11 & -0.15 & -0.15 & 1.07 \end{pmatrix}$$

Para cada estaca:

$$K_C = K_V(1,07 \ -0,15 \ -0,15 \ -0,11) = 0,66 K_V$$

Para o grupo:

$$K_{gr} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}$$

$$K_{GRUPO} = 4 K_{CV} = 4 \cdot 0,66 \cdot 1,07 \cdot 10^6 = 2,82 \cdot 10^6 \text{ kN/m}$$

- Mesmo exemplo numérico, processamento com o PILAY

---

**INPUT DATA PROBLEM NO. 1**

---

NE= 1      TL= 30.00      VST= 152.000

EP= 0.3000E+08 PST= 0.0000E+00 GMP=25.00 GAC=10.00 PRP=0.25 SHFC= 1.334

LAYER TH(I) VS(I) GMS(I) PR(I) TDL(I) RO(I) PAR(I)      PIN(I)      PTJ(I)  
 1 30.00 152.00 20.00 0.300 0.100 0.400 0.5000E+00 0.2000E-01 0.4970E+00

SOIL BELOW TIP 152.00 20.00 0.300 0.100

DIMENSIONLESS RATIOS

VST/VC= 0.0439 VB/VST= 1.0000 SQRT GT/EP= 0.0392 TL/RO= 75.00

---

**OUTPUT DATA PROBLEM NO. 1 FREQUENCY NO. 1 OMG= 1.000 AOT= 0.0026**

**STIFFNESS AND DAMPING PARAMETERS**

FW1	FT1	FU1	FP1	FC1	PINNED FN1
0.32425E-01	0.48404E-01	0.31234E-01	0.38896E+00	-0.75264E-01	0.16671E-01

FW2	FT2	FU2	FP2	FC2	FN2
0.73353E-01	0.13772E-01	0.87482E-01	0.33529E+00	-0.13676E+00	0.47108E-01

**STIFFNESS AND DAMPING CONSTANTS K1 C1**

KWW	KZT	KUU	KPP	KPU	PINNED KUN
0.12159E+07	0.72170E+06	0.29282E+06	0.58344E+06	-0.28224E+06	0.15629E+06

CWW	CZT	CUU	CPP	CPU	CUN
0.72387E+04	0.54039E+03	0.21583E+04	0.13235E+04	-0.13496E+04	0.11622E+04

---

**OUTPUT DATA PROBLEM NO. 1 FREQUENCY NO. 2 OMG= 30.000**

**STIFFNESS AND DAMPING PARAMETERS**

FW1	FT1	FU1	FP1	FC1	PINNED FN1
0.32749E-01	0.48104E-01	0.31368E-01	0.39151E+00	-0.75919E-01	0.16727E-01

FW2	FT2	FU2	FP2	FC2	FN2
0.70083E-01	0.13758E-01	0.87191E-01	0.33003E+00	-0.13556E+00	0.46960E-01

**STIFFNESS AND DAMPING CONSTANTS K1 C1 PINNED**

KWW	KZT	KUU	KPP	KPU	PINNED KUN
0.12281E+07	0.71722E+06	0.29407E+06	0.58726E+0	-0.28470E+06	0.15682E+06

CWW	CZT	CUU	CPP	CPU	CUN
0.69161E+04	0.53980E+03	0.21511E+04	0.13028E+04	-0.13377E+04	0.11585E+04

- Aplicação para o bloco de 4 estacas submetido a cargas harmônicas vertical e horizontal

Massa total = 800 t.

Força harmônica = 50 kN, a 300 rpm (5 Hz), considerada como aplicada por um motor elétrico, ao nível das estacas.

Parâmetros das estacas isoladas obtidos na rodada do PILAY acima, com  $\omega = 30$  rad/s:

$$K_{HH} = 0,29407 \cdot 10^6 \text{ kN/m} \quad C_{HH} = 0,21511 \cdot 10^4 \text{ kNs/m (rigidez 6\% superior à do Poulos)}$$

$$K_{VV} = 0,12281 \cdot 10^7 \text{ kN/m} \quad C_{VV} = 0,69161 \cdot 10^4 \text{ kNs/m (rigidez 15\% superior à do Poulos)}$$

Parâmetros das estacas em grupo, considerando como aplicáveis os fatores de grupo avaliados pelo método de Poulos para os coeficientes de rigidez e de amortecimento:

Sentido horizontal:

$$K_{HH,GRUPO} = 4 \cdot 0,531 \cdot 2,9407 \cdot 10^5 = 6,25 \cdot 10^5 \text{ kN/m}$$

$$C_{HH,GRUPO} = 4 \cdot 0,531 \cdot 2,1511 \cdot 10^3 = 4,57 \cdot 10^3 \text{ kNs/m}$$

Sentido vertical:

$$K_{VV,GRUPO} = 4 \cdot 0,66 \cdot 1,2281 \cdot 10^6 = 3,24 \cdot 10^6 \text{ kN/m}$$

$$C_{VV,GRUPO} = 4 \cdot 0,66 \cdot 6,9161 \cdot 10^3 = 1,83 \cdot 10^4 \text{ kNs/m}$$

- Análise no sentido horizontal:

$$f = 4,449 \text{ Hz}$$

$$\varepsilon = \frac{C}{2\sqrt{K \cdot M}}$$

$$\varepsilon = 0,102$$

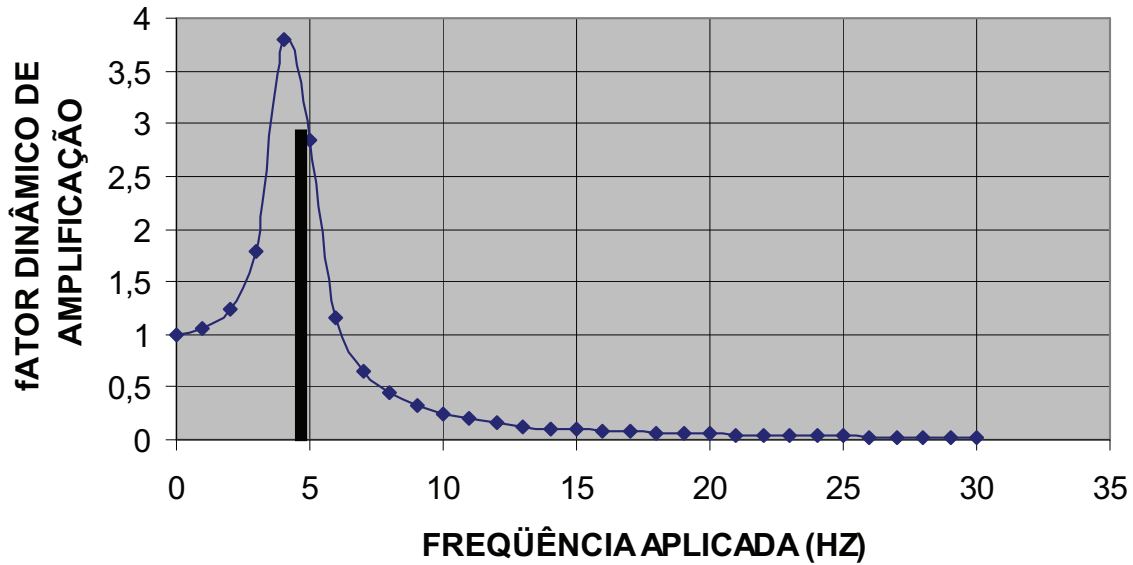
$$D = \frac{1}{\left[ (1 - \beta^2)^2 + (2\beta\varepsilon)^2 \right]^{0,5}}$$

Para a frequência de 5 Hz, o fator dinâmico de amplificação é:

$$D = 2,834$$

$$u_H = 2,834 \cdot \frac{50}{625000} = 227 \text{ } \mu\text{m (não tolerável, } \geq 160 \text{ } \mu\text{m)}$$

## ESTAQUEAMENTO - SENTIDO HORIZONTAL



- Análise no sentido vertical:

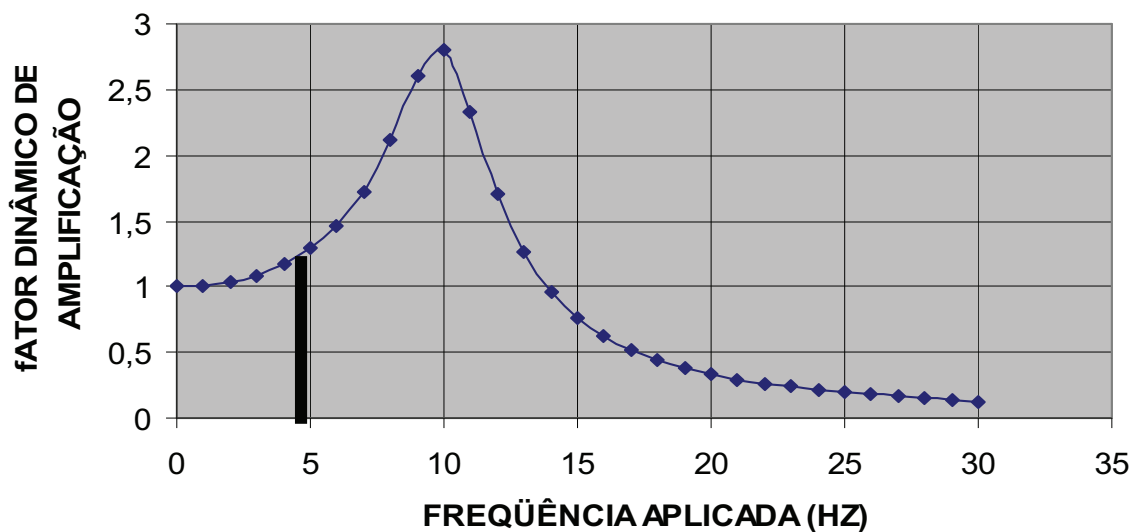
$f = 10,129 \text{ Hz}$  ;  $\varepsilon = 0,180$

Para a frequência de 5Hz, o fator dinâmico de amplificação é:

$D = 1,287$

$u_v = 1,287 \cdot \frac{50}{3240000} = 19,9 \text{ } \mu\text{m}$  (faixa ótima)

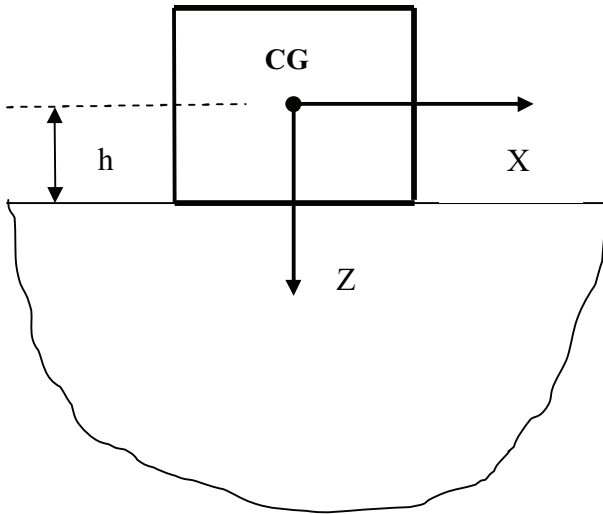
## ESTAQUEAMENTO - SENTIDO VERTICAL



### 3.5 Análise Automatizada

- Formulação

É considerado o sistema de eixos abaixo:



Devem ser consideradas as matrizes:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 & 0 & K_x h & 0 \\ & K_y & 0 & -K_y h & 0 & 0 \\ & & K_z & 0 & 0 & 0 \\ & & & K_{xx} + K_y h^2 & 0 & 0 \\ & & & & K_{yy} + K_x h^2 & 0 \\ & & & & & K_{zz} \end{bmatrix}$$

SIMÉTRICA

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_x & 0 & 0 & 0 & C_x h & 0 \\ & C_y & 0 & -C_y h & 0 & 0 \\ & & C_z & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{xx} + C_y h^2 & 0 & 0 \\ & & & & C_{yy} + C_x h^2 & 0 \\ & & & & & C_{zz} \end{bmatrix}$$

SIMÉTRICA

A matriz de massa é simétrica pela coincidência da origem do sistema do sistema de eixos com o centro de gravidade.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & M_z & 0 & 0 & 0 \\ & & & M_{xx} & 0 & 0 \\ & & & & M_{yy} & 0 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & & & M_{zz} \end{bmatrix}$$

Problema a ser resolvido:

$$\mathbf{M} \mathbf{u}''(t) + \mathbf{C} \mathbf{u}'(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F} e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u} e^{i\omega t} = \mathbf{F} e^{i\omega t}$$

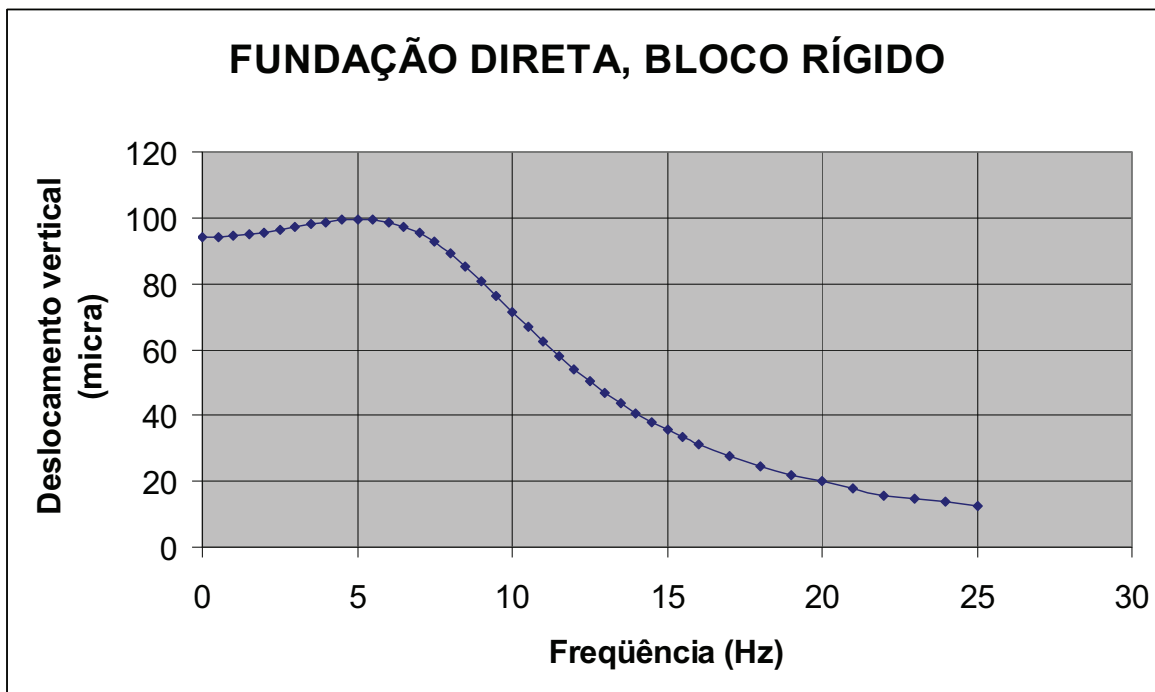
- Exemplo numérico

Bloco = (5,317 . 5,317 . 1,8) m<sup>3</sup>

Massa adicional = 40 t ; Massa total = 167,22

Solo: G = 30 MPa; ρ = 1,8 t/m<sup>3</sup> ; ν = 0,35

Força vertical: F<sub>0</sub> = 50 kN



Nas páginas seguintes, o mesmo problema resolvido com o programa BLOCKSOLVER. Apresentam-se as telas geradas pelo programa.

BlockSolver

Arquivo Ferramentas Propriedades Cargas Análise

**Matriz de Massa**

167.217	0	0	0	0	0
0	167.217	0	0	0	0
0	0	167.217	0	0	0
0	0	0	334.056	0	0
0	0	0	0	334.056	0
0	0	0	0	0	599.415

**Matriz Rigidez**

444695	0	0	0	400225	0
0	444695	0	-400225	0	0
0	0	576690	0	0	0
0	-400225	0	3.82899E6	0	0
400225	0	0	0	3.82899E6	0
0	0	0	0	0	4.68417E6

**Matriz Amortecimento**

5955	0	0	0	5359
0	5955	0	-5359	0
0	0	10938	0	0
0	-5359	0	24912	0
5359	0	0	0	2491
0	0	0	0	0

**Cargas**

Z	XX	YY	ZZ
50	0	0	0
0	0	0	0

Frequência de Operação da Máquina (Hz)

Frequência Inicial (Hz)

Incremento de Frequência (Hz)

Número de Incremento de Frequências (Hz)

**Centro Geométrico da Base**

X (m)	Y (m)	Z (m)
0.0000	0.0000	0.0000

**Centro de Massa**

X (m)	Y (m)	Z (m)
0.0000	0.0000	0.9000

BlockSolver

Arquivo Ferramentas Propriedades Cargas Análise

**Matriz de Massa**

167.217	0	0	0	0	0
0	167.217	0	0	0	0
0	0	167.217	0	0	0
0	0	0	334.056	0	0
0	0	0	0	334.056	0
0	0	0	0	0	599.415

**Matriz Rigidez**

444695	0	0	0	400225	0
0	444695	0	-400225	0	0
0	0	576690	0	0	0
0	-400225	0	3.82899E6	0	0
400225	0	0	0	3.82899E6	0
0	0	0	0	0	4.68417E6

Frequência de Operação da Máquina (Hz)

Frequência Inicial (Hz)

Incremento de Frequência (Hz)

Número de Incremento de Frequências (Hz)

**Centro Geométrico da Base**

X (m)	Y (m)	Z (m)
0.0000	0.0000	0.0000

**Centro de Massa**

X (m)	Y (m)	Z (m)
0.0000	0.0000	0.9000

**Geometria**

Número de Blocos

A base da fundação deverá ter a sua maior dimensão alinhada com o eixo X sendo a geometria dos restantes blocos definida em concordância com esta orientação.

**Dimensões dos Blocos**

	X (m)	Y (m)	Z (m)
Bloco 1	5.317	5.317	1.8

BX (m)  Dimensão da Base

BY (m)

Xb (m)  Coordenadas do Centro Geométrico da Base

Yb (m)

Zb (m)

**Coordenadas do Centro de Gravidade dos Blocos**

	X (m)	Y (m)	Z (m)
Bloco 1	0	0	0.9

BlockSolver

Arquivo Ferramentas Propriedades Cargas Análise

Matriz de Massa

167.217	0	0	0	0	0
0	167.217	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Matriz Rigidez

444695	0	0	0	400225	0
0	444695	0	-400225	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	4.68417E6

Massas

Número de Massas Concentradas: 1

Peso Volúmico dos Blocos

Bloco	(Ton/m3)
Bloco 1	2.5

Coordenadas das Massas e Respetivos Valores

Massa	X	Y	Z	(Ton)
Massa 1	0.	0.	0.9	40.

OK Cancelar

Frequência de Operação (Hz): 0.1

Incremento de Frequência (Hz): 0.1

Número de Incremento de Frequências (Hz): 250

Windows Taskbar: Iniciar, 3 Intern..., 2 Micros..., Microsoft..., Disco local..., BlockSolver, Adobe Re..., PT, Links, 15:05

BlockSolver

Arquivo Ferramentas Propriedades Cargas Análise

Matriz de Massa

167.217	0	0	0	0	0
0	167.217	0	0	0	0
0	0	167.217	0	0	0
0	0	0	334.056	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Matriz Rigidez

444695	0	0	0	400225	0
0	444695	0	-400225	0	0
0	0	576690	0	0	0
0	-400225	0	3.82899E6	0	0
0	0	0	0	3.82899E6	0
0	0	0	0	0	4.68417E6

Matriz Amortecimento

5955	0	0	0
0	5955	0	-5359
0	0	10938	0
0	-5359	0	24912
5359	0	0	0
0	0	0	0

Solo

Módulo de Distorção Transversal (KN/m<sup>2</sup>): 30000

Coefficiente de Poisson: 0.35

Massa Volúmica (ton/m<sup>3</sup>): 1.8

OK Cancelar

Frequência de Operação da Máquina (Hz): 5

Frequência Inicial (Hz): 0

Incremento de Frequência (Hz): 0.1

Número de Incremento de Frequências (Hz): 250

Centro Geométrico da Base

X (m)	Y (m)	Z (m)
0.0000	0.0000	0.0000

Centro de Massa

X (m)	Y (m)	Z (m)
0.0000	0.0000	0.9000

Windows Taskbar: Iniciar, 3 Intern..., 2 Micros..., Microsoft..., Disco local..., BlockSolver, Adobe Re..., PT, Links, 15:05



BlockSolver

Arquivo Ferramentas Propriedades Cargas Análise

Matriz de Massa      Matriz Rigidez

167.217	0	0	0	0	0	0	444695	0	0	0	400225	0
0	167.217	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	167.217	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	167.217	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	167.217	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	167.217	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	167.217	0	0	0	0	0	0

**Amplitudes**

Amplitudes Máximas de Carregamento

	X (KN)	Y (KN)	Z (KN)	XX (KN.m)	YY (KN.m)	ZZ (KN.m)
Massa Concentrada 1	0.	50.	50.	0.	0.	0.

Ângulos de Fase (graus)

	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
Massa Concentrada 1	.	.	90	.	.	.

OK      Cancelar

5955    0

0    5955

0    0

0    -5359

5359    0

0    0

Frequência

Número de In

Iniciator    3 Intern...    2 Micros...    Microsoft ...    Disco local...    Blocksolver    Adobe Re...    PT    Links    15:07

BlockSolver

Arquivo Ferramentas Propriedades Cargas Análise

Matriz de Massa      Matriz Rigidez

167.217	0	0	0	0	0	0	444695	0	0	0	400225	0
0	167.217	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	167.217	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	167.217	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	167.217	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	167.217	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	167.217	0	0	0	0	0	0

Matriz Am

5955	0	0
0	5955	0
0	0	10938
0	-5359	0
5359	0	0
0	0	0

**Frequências**

Frequência de Operação da Máquina (Hz)    5

Frequência Inicial (Hz)    .

Incremento de Frequência (Hz)    0.1

Número de Incremento de Frequências (Hz)    250

OK      Cancelar

Frequência de Operação da Máquina (Hz)    5

Frequência Inicial (Hz)    0

Incremento de Frequência (Hz)    0.1

Número de Incremento de Frequências (Hz)    250

Centro Geométrico da Base

X (m)	Y (m)	Z (m)
0.0000	0.0000	0.0000

Centro de Massa

X (m)	Y (m)	Z (m)
0.0000	0.0000	0.9000

Iniciator    3 Intern...    2 Micros...    Microsoft ...    Disco local...    Blocksolver    Adobe Re...    PT    Links    15:07

Matriz de Massa

167.217	0	0	0	0	0
0	167.217	0	0	0	0
0	0	167.217	0	0	0
0	0	0	334.056	0	0
0	0	0	0	334.056	0
0	0	0	0	0	599.415

Matriz Rigidez

444695	0	0	0	400225	0
0	444695	0	-400225	0	0
0	0	576690	0	0	0
0	-400225	0	3.82899E6	0	0
400225	0	0	0	3.82899E6	0
0	0	0	0	0	4.68417E6

Matriz Amortecimento

5955	0	0	0	5359	0
0	5955	0	-5359	0	0
0	0	10938	0	0	0
0	-5359	0	24912	0	0
5359	0	0	0	24912	0
0	0	0	0	0	13483

Cargas

	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
REAL	0	50	50	0	0	0
IMAGINÁRIA	0	0	0	0	0	0

Frequência de Operação da Máquina (Hz)

Frequência Inicial (Hz)

Incremento de Frequência (Hz)

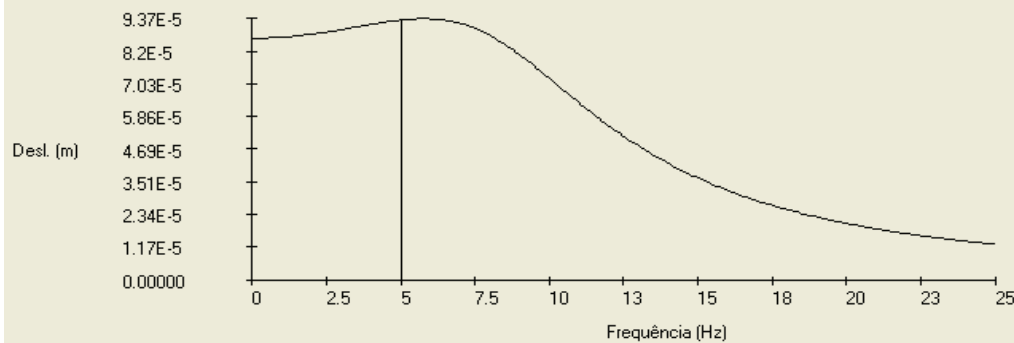
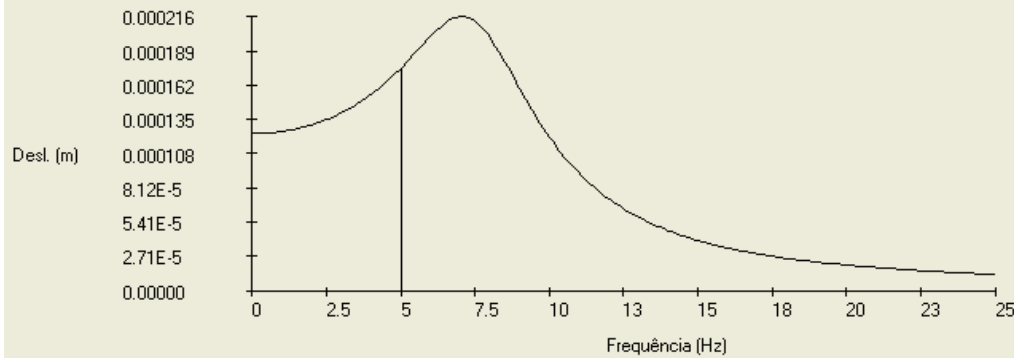
Número de Incremento de Frequências (Hz)

Centro Geométrico da Base

X (m)	Y (m)	Z (m)
0.0000	0.0000	0.0000

Centro de Massa

X (m)	Y (m)	Z (m)
0.0000	0.0000	0.9000



## 4. CRITÉRIOS DE PROJETO

### 4.1 Classificação das Fundações

As seguintes informações estão envolvidas em um projeto de Fundações de Máquinas:

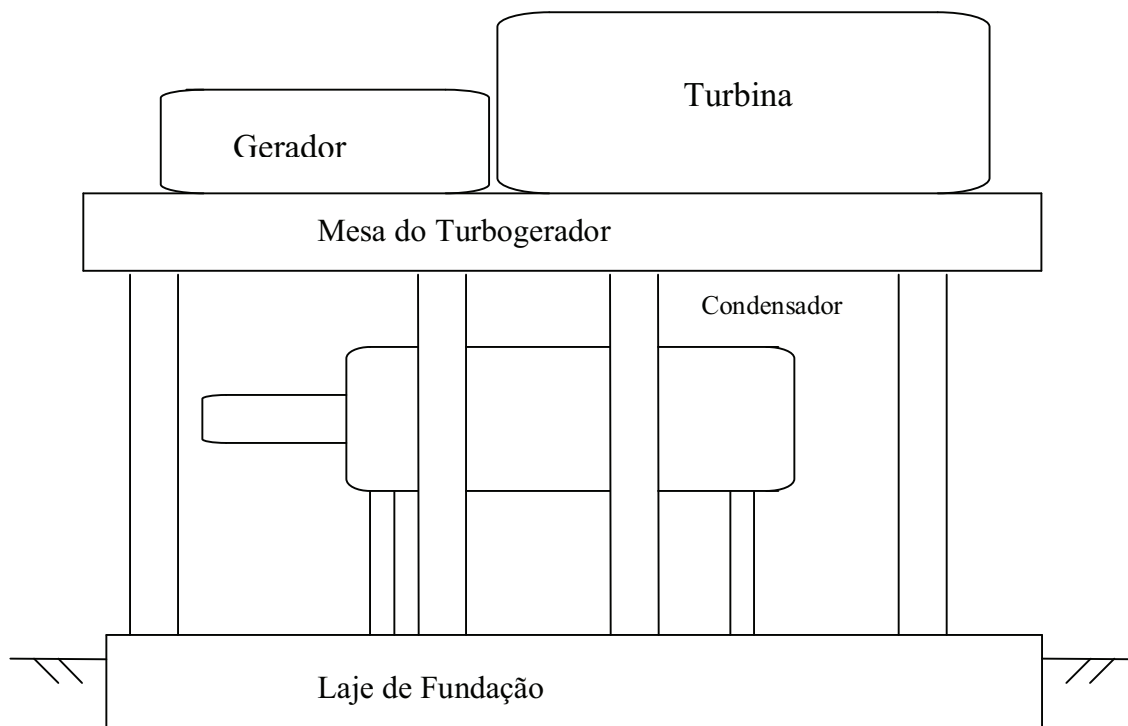
- Análise do equipamento e avaliação das forças dinâmicas presentes durante a operação
- Avaliação das características elásticas do solo e dos materiais de fundação
- Elaboração do modelo estrutural
- Análise dinâmica
- Verificação dos deslocamentos máximos quanto às tolerâncias
- Projeto de isoladores (eventual)
- Dimensionamento estrutural e verificação das tensões máximas no solo

O quadro abaixo dá uma classificação genérica das Fundações de Máquinas (Srinivasalu [6], pg.2):

Grupo de Máquinas	Movimento Principal	Tipo de Máquina	Faixa de Freqüência	Tipo de Fundação
Máquinas de movimento periódico	Movimento de rotação uniforme	Geradores, motores elétricos, turbinas, bombas centrífugas	(Alta) $\geq 1000$ rpm	Fundações flexíveis: Pórticos ou blocos maciços com pequena base e/ou isolador adequado
	Movimento de rotação uniforme simultâneo a um movimento retilíneo alternativo	Máquinas de mecanismo biela-manivela: motores a piston (gás ou diesel) e compressores a piston	(Baixa) 0-500 rpm	Fundações rígidas: Blocos maciços com grande base
			(Média) 300-1000 rpm	Bloco com isolador
Máquinas de movimento não-periódico	Movimento de vai-e-vem seguido de choque	Martelos-pilão e martelos de forja		Bloco maciço ou vasado com absorvedor de choque

Máquinas leves com pequenas forças de inércia não necessitam de cuidados especiais (tornos, impressoras, teres, pequenas bombas, etc.).

O esquema básico de um Turbogenerador é mostrado a seguir.



## 4.2 Definição das Cargas Dinâmicas a Serem Consideradas

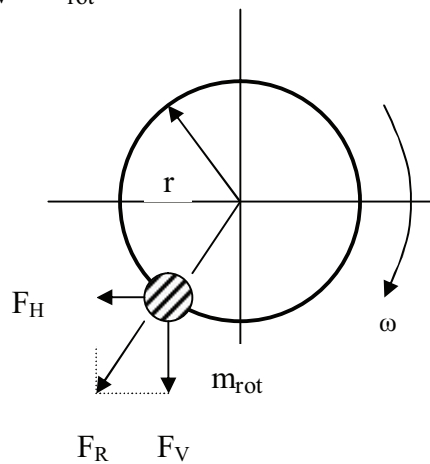
- Forças dinâmicas em máquinas rotativas

Causas do desbalanceamento das máquinas: imperfeições iniciais, problemas no transporte, desgaste, folgas, etc.

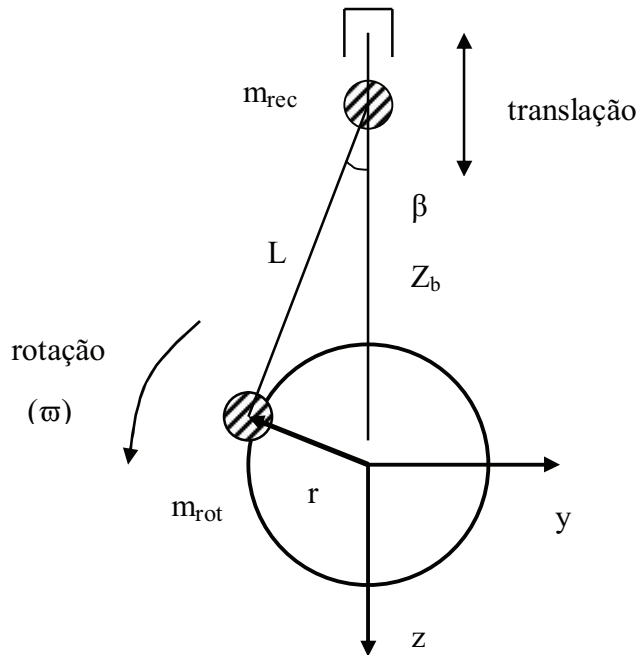
$$F_R = m_{\text{rot}} r \omega^2$$

$$F_H = m_{\text{rot}} r \omega^2 \sin \omega t$$

$$F_V = m_{\text{rot}} r \omega^2 \cos \omega t$$



- Forças dinâmicas em máquinas biela-manivela



$$\alpha = r/L ; \text{sen } \beta = \alpha \text{ sen } \omega t$$

$$Z_b = r \cos \omega t + L \cos \beta$$

$$F_y = m_{rot} r \omega^2 \text{sen } \omega t$$

$$F_z = m_{rec} Z_b'' + m_{rot} r \omega^2 \cos \omega t \quad \text{ou}$$

$$F_z = (m_{rec} + m_{rot}) r \omega^2 \cos \omega t + m_{rec} \frac{r^2}{L} \omega^2 \cos 2\omega t + \dots$$

A carga do braço deve ser estaticamente distribuída entre  $m_{rot}$  e  $m_{rec}$ . A força no sentido Z tem uma parcela “primária” e uma “secundária”. Todas as forças devem ser fornecidas pelos fornecedores dos equipamentos. Normalmente quando há vários cilindros é possível se “balancear” as forças dinâmicas.

- Exemplo numérico de avaliação de forças dinâmicas em máquinas biela-manivela

- Determinar as forças dinâmicas provocadas por um motor monocilíndrico, cujas características são:

Velocidade de rotação: 1000 rpm

Manivela:  $r = 4'' = 0,102\text{m}$

Biela:  $L = 15'' = 0,381\text{m}$

Peso desbalanceado:  $W_{rec} = 19\text{lb} = 0,084 \text{ kN}$

Peso do motor :  $W = 2270 \text{ lb} = 10\text{kN}$

Solução:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 1000/60 = 104,7 \text{ rad/s}$$

$$m_{rot} = 20\% \text{ da massa do motor} = 0,2 \cdot 1 = 0,2\text{t} \quad (\text{adotado})$$

$$F_y = 0,2 \cdot 0,102 \cdot 104,7^2 \text{sen } 104,7t = 223,6 \text{ kN} \cdot \text{sen } 104,7t$$

$$F_z = (0,0084+0,2) \cdot 0,102 \cdot 104,7^2 \cos 104,7t + 0,0084 \cdot \frac{0,102^2}{0,381} 104,7^2 \cos 2 \cdot 104,7t$$

$$= 233,0 \cos 104,7t + 2,514 \cos 209,4t$$

- Forças mínimas a serem consideradas no projeto de máquinas rotativas

As máquinas rotativas são balanceadas antes de sua montagem. Porém, na operação real, excentricidades surgem devido a folgas, desajustes e desgaste. Excentricidades típicas ( $e$ ), para diversos valores de frequência de operação (em RPM), encontradas nas partes móveis das máquinas rotativas, são dadas na tabela abaixo, segundo Major ([5], Vol.3, pg. 106). Observar que:

$$F_R = m_{rot} r \omega^2 = m_{rot} e (2\pi f_{RPM}/60)^2 = \alpha_g g m_{rot}$$

$$\alpha_g = e (2\pi f_{RPM}/60)^2 / g \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Frequência de operação (RPM)	Em operação (Major)		Na ruptura (Major)		DIN 4024
	$e$ (mm)	$\alpha_g$	$e$ (mm)	$\alpha_g$	$\alpha_g$
3000	0,020	0,20	0,100	1,00	1,20
1500	0,064	0,16	0,320	0,80	0,60
750	0,160	0,10	0,800	0,50	0,30

A situação de operação corresponde às amplitudes de máquinas normalmente balanceadas. A situação de ruptura corresponde às amplitudes de máquinas com balanceamento já inadmissível.

A DIN 4024 ([17], item 5.4.4) define a força desbalanceada “K” para o projeto:

$$K = 1,2 \cdot L \cdot \frac{f_m}{50} \quad L \text{ é o peso do rotor e } f_m \text{ é a frequência de operação em Hz}$$

$$K = 0,235 \cdot m_{rot} \cdot f_m \quad \alpha_g = 0,235 \cdot f_m / g$$

Estas forças correspondem a uma velocidade de 38mm/s. Na tabela acima, os valores resultantes da aplicação da fórmula da DIN 4024 são apresentados, para comparação com os critérios do Major.

Na falta de outras informações, pode-se adotar no projeto que a massa rotativa seja de 20% da massa total do equipamento. É muito conservador o critério da DIN 4024, de limitar na análise, o valor das frações de amortecimento crítico a 25%.

Em geradores, normalmente deve-se prever um momento gerado em uma situação de curto-circuito. Este momento pode ser avaliado (Major, [5], Vol.3, pg.85) por uma das expressões (ver também a DIN 4024, item 5.5.2):

$$M = 40 W \quad (M \text{ em kN.m, } W = \text{capacidade do gerador em MW})$$

$$M = \frac{G_r \cdot r \cdot N}{3800}$$

( $G_r$  – peso do rotor,  $r$  – raio externo do invólucro do rotor,  $N$  – rotação em RPM)

- Exemplo numérico de determinação de forças a serem consideradas no projeto de máquinas rotativas
  - Determinar as forças dinâmicas a serem consideradas em um turbogerador com as características abaixo. Completar o esquema com a expressão analítica das forças, incluindo sua defasagem no tempo.

Potência: 12000kW

Peso total, incluindo o rotor: 1100kN

Peso das partes rotativas: 200 kN

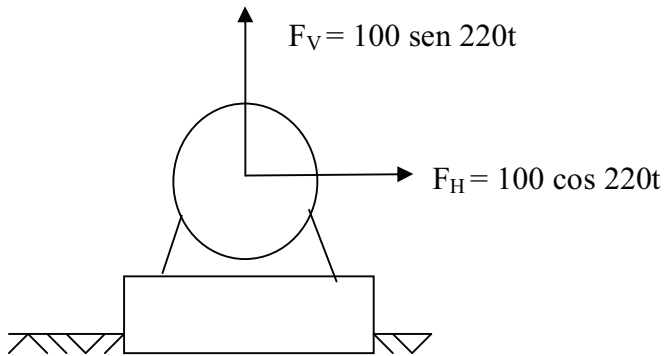
Velocidade de rotação: 2100 rpm = 35 Hz

Solução:

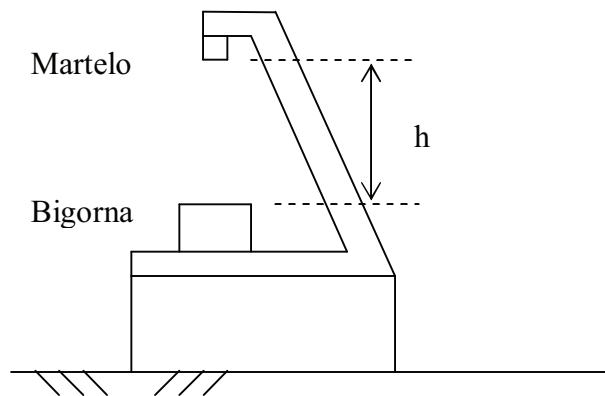
$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 2100/60 = 220 \text{ rad/s}$$

Pela DIN 4024:

$$F_R = 0,235 \cdot m_{\text{rot}} \cdot f_m = 0,235 \cdot 20 \cdot 35 = 164,5 \text{ kN}$$



- Forças dinâmicas em máquinas à percussão (Srinivasalu, pg. 104)



- Martelos de efeito simples (queda)

Velocidade de impacto:

$$u' = \eta \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (\eta = 0,9 - \text{eficiência})$$

- Martelos de efeito duplo (queda + pressão de ar ou vapor)

Velocidade de impacto:

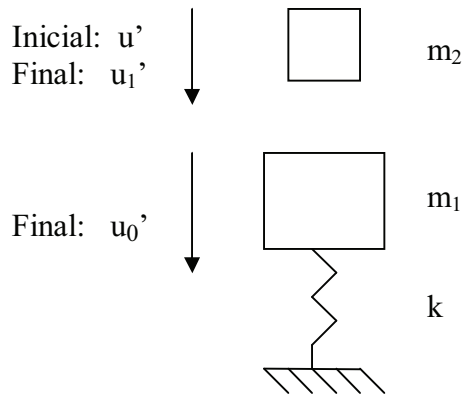
$$u' = \eta \sqrt{2 \cdot g \cdot h \left( 1 + \frac{A \cdot p}{W} \right)} \quad (\eta = 0,55 \text{ a } 0,8, \text{ em média } 0,65)$$

( $A$  – área do êmbolo;  $p$  – pressão média sobre o êmbolo;  $W$  – peso do martelo)

- Dinâmica do choque

Quantidade de movimento antes do choque = Quantidade de movimento após o choque

$$m_2 u' = m_2 u_1' + m_1 u_0'$$



Hipótese de Newton:

$$\xi = \frac{u_0' - u_1'}{u'} \quad (\xi \text{ é o coeficiente de restituição})$$

$\xi = 1$  – choque perfeitamente elástico

$\xi = 0$  – choque perfeitamente plástico

$$\xi u' = u_0' - u_1' \quad ; \quad u_1' = u_0' - \xi u'$$

$$m_2 u' = m_2 u_1' + m_1 u_0' \quad ; \quad m_2 u' = m_2 (u_0' - \xi u') + m_1 u_0'$$

$$m_2 u_0' + m_1 u_0' = m_2 u' + m_2 \xi u' \quad ; \quad u_0' (1 + \mu) = (1 + \xi) u' \quad (\mu = m_1 / m_2)$$

$$u_0' = \frac{1 + \xi}{1 + \mu} u'$$

Valores típicos de  $\xi$  :

Martelos que forjam peças de aço:  $\xi = 0,50$

Martelos que trabalham metais a frio:  $\xi = 0,25$

Martelos que forjam metais não ferrosos:  $\xi = 0,10$

- Exemplo numérico de avaliação de forças dinâmicas em máquinas à percussão

- Verificar se é admissível o deslocamento máximo após o impacto, para a fundação para o martelo de queda livre com as características:

Peso do martelo: 10kN

Peso do conjunto bigorna-fundação: 750 kN

Coeficiente de restituição: 0,25

Altura de queda: 1,8 m

Dimensões da base: (3,5 . 3,5) m<sup>2</sup>

Módulo de deformação transversal e massa específica do solo:  $G = 40 \text{ MPa}$  ;  $\rho = 1,8 \text{ t/m}^3$

Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$

Solução:

$$u' = 0,9 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,8} = 5,35 \text{ m/s}$$



$$u_0' = \frac{1 + \xi}{1 + \mu} u' \quad \mu = 75,0/1,0 = 75 \quad \xi = 0,25 \text{ (adotado)}$$

$$u_0' = 0,088\text{m/s} = 88 \text{ mm/s}$$

$$M = m_1 + m_2 = 75 + 1 = 76\text{t}$$

Considerando inicialmente um sistema não amortecido:

$$K = K_z = \frac{4,7.G.b}{1-\nu} = \frac{4,7.40000.1,75}{1-0,25} = 438667 \text{ kN/m}$$

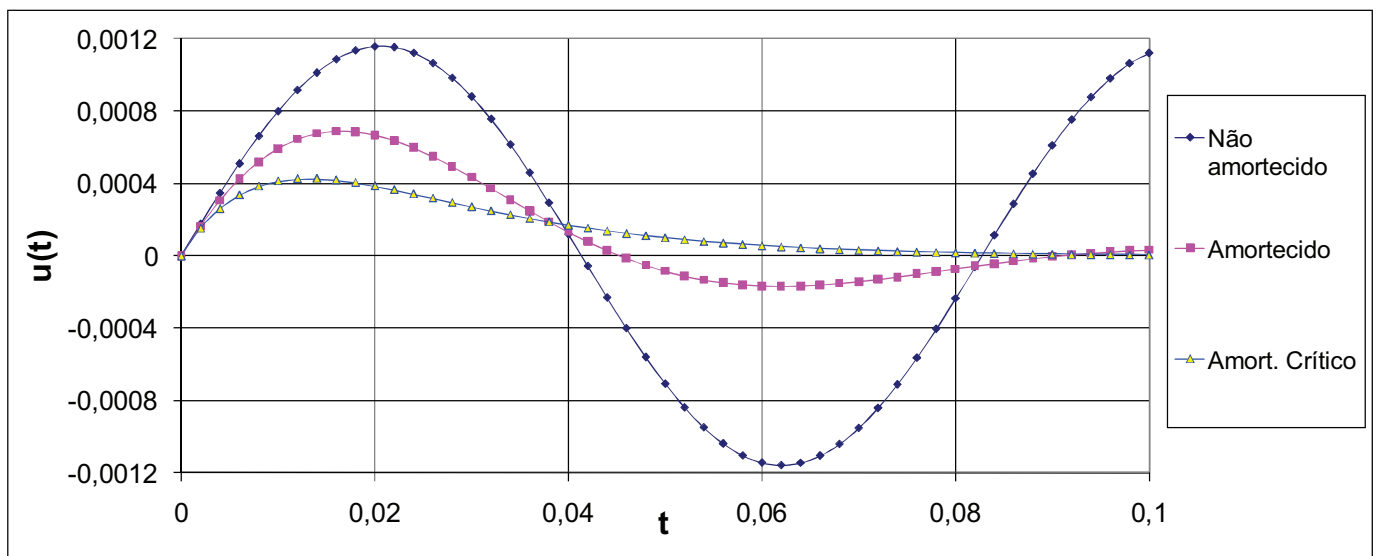
$$\omega = \sqrt{K/M} = 75,97 \text{ rad/s}$$

$$u = \frac{u_0'}{\omega} \text{sen } \omega t = 1,16 \text{ sen } 72,8t \quad u_{MAX} = 1,16 \text{ mm (OK, ver item 4.3.2)}$$

Considerando o sistema como amortecido:

$$r = (4cd/\pi)^{1/2} = (3,5^2/\pi)^{1/2} = 1,975\text{m}; \quad C = \frac{3,4.r^2}{1-\nu} \cdot \sqrt{\rho.G} = \frac{3,4.1,975^2}{1-0,25} \cdot \sqrt{1,8.40000} = 4744 \text{ kN.s/m}$$

O deslocamento do sistema de um grau de liberdade amortecido ( $\xi=0,41$ ) é representado graficamente abaixo, fornecendo  $u_{MAX} = 0,69\text{mm}$  (OK)



### 4.3 Verificação das Tolerâncias de Deslocamentos

As limitações das amplitudes dos deslocamentos estão ligadas ao bom funcionamento dos equipamentos (critérios a serem definidos pelos fabricantes), ao conforto humano e ao nível de vibrações que será admitido propagar ao meio ambiente, através do solo. Existem instrumentos específicos para a medição de amplitudes de vibrações. Em um grande complexo industrial, a medição periódica destas amplitudes faz parte da rotina de manutenção das máquinas.

#### 4.3.1 Limitações para Máquinas Rotativas

Para máquinas rotativas, podem ser empregados os limites definidos pela ISO 2372 [16]. A Tabela 2 desta norma, abaixo reproduzida, fornece as faixas de operação para as diversas Classes de Equipamentos, conforme definido a seguir:

Classe I – Pequenas máquinas (“output” ≤ 15 kW)

Classe II – Motores elétricos

Classe III – Máquinas pesadas

Classe IV – Turbo-geradores

Faixas de velocidade efetiva (mm/s)	Classes de equipamentos			
	Classe I	Classe II	Classe III	Classe IV
0 a 0,71	A	A	A	A
0,71 a 1,12	B	B		
1,12 a 1,8	C		C	B
1,8 a 2,8		D		D
2,8 a 4,5	D		D	
4,5 a 7,1		D		D
7,1 a 11,2	D		D	
11,2 a 18,0		D		D
Mais do que 18,0	D		D	

Definição das diversas faixas de operação das máquinas:

- Faixa A – Faixa ótima
- Faixa B – Aceitável
- Faixa C – Tolerável
- Faixa D - Inaceitável

A Fig. 2.4, reproduzida da ISO 2372, representa graficamente as faixas acima definidas.

Para uma base de equipamento em que existam vibrações ocorrendo em diversas ( $n$ ) frequências, a velocidade efetiva ( $rms$  - “root mean square”) em um ponto é definida, em função da variação da velocidade  $v(t)$  neste ponto, pela expressão abaixo, em que a integral é avaliada entre 0 e  $T$ , sendo  $T$  um determinado instante no tempo:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int v^2(T) dt}$$

No caso das excitações serem harmônicas:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)}$$

Onde os  $v_i$  correspondem às velocidades máximas associadas a cada uma das frequências presentes.

#### 4.3.2 Limitações para Máquinas de Impacto

As limitações para bigornas são:

Peso dos Martelos	$\delta_{ADM}$ na bigorna	$\delta_{ADM}$ no bloco de fundação	Espessura mínima do bloco
< 1t	1 mm	1,2 mm	1,00 m
< 2t	2 mm	1,2 mm	1,25 m
< 3t	3 a 4 mm	1,2 mm	1,50 m
< 4t			1,75 m
< 6t			2,25 m

Pode ser projetado um isolamento elástico entre o bloco de fundação e o solo (ver Major).

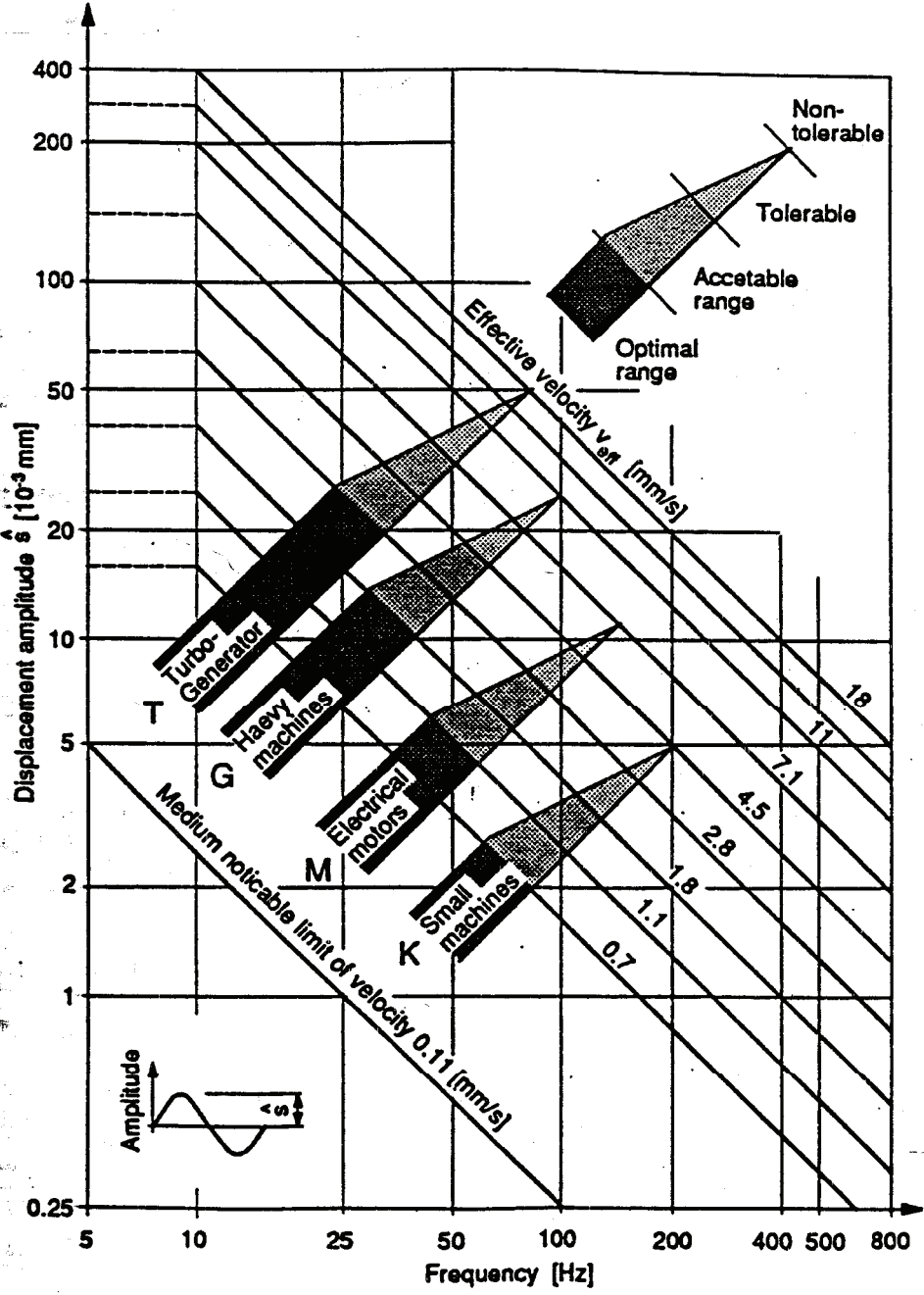


Figure 2.4: Effective velocity levels for operation of different machines (according to [VDI 2056]).

#### 4.4 Verificação das Tensões no Solo

Devido às altas acelerações impostas ao solo, a capacidade de carga em condições dinâmicas, deve ser considerada como menor do que a capacidade em condições estáticas. Os fatores de redução fornecidos na tabela a seguir devem ser considerados.

Tipo de Máquina	Fator de redução
Martelos	0,4
Máquinas de alta velocidade de rotação (em torno de 3000 rpm)	0,8
Máquinas de baixa velocidade de rotação	1,0

Deve ser considerada a possibilidade de compactação de solos arenosos submetidos a solicitações em altas frequências.

#### 4.5 Detalhamento dos Elementos Estruturais. Requisitos de Projeto

##### 4.5.1 Fadiga dos elementos estruturais

Os materiais submetidos a cargas alternadas atingem a ruptura sob uma carga menor do que a estática.

Critério de fadiga:

$$E_d = \gamma_f ( E_e + \gamma_y E_y )$$

$E_d$  – valor de cálculo do efeito elástico considerado

$\gamma_f$  - coeficiente de majoração das cargas

$E_e$ ,  $E_y$  – parcelas estática e dinâmica do elástico considerado

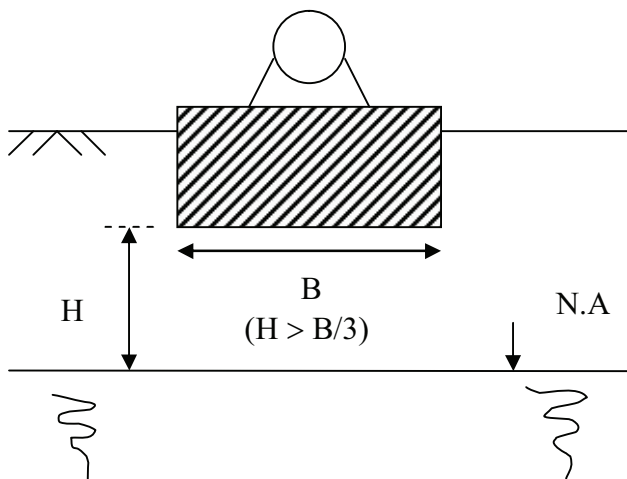
$\gamma_y$  – coeficiente de fadiga

Podem ser adotados os valores abaixo para o coeficiente de fadiga:

$\gamma_y = 2$  – Concreto armado e protendido, metais

$\gamma_y = 3$  – Madeira, concreto simples, alvenaria, pedra

##### 4.5.2 Recomendações gerais de projeto

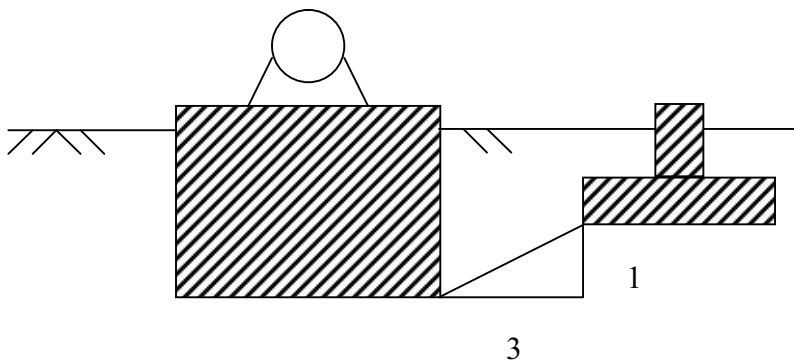


O lençol freático propaga vibrações a longas distâncias. Como alternativa à limitação na dimensão máxima dos blocos, acima definida, pode-se pensar em fundações sobre estacas, ou em utilizarem-se dispositivos isoladores de vibração.

Nos casos de tubulações ligadas às máquinas suportadas pelos blocos, devem-se definir as tolerâncias nos deslocamentos máximos, de forma a se evitar perda de estanqueidade e possíveis vazamentos.

As bases de equipamentos devem estar separadas por juntas das fundações das estruturas vizinhas. Estas devem estar acima das bases dos equipamentos, considerando um talude máximo de 1:3 (ver figura a seguir). As bases devem estar adequadamente protegidas contra eventuais vazamentos de óleo.

Normalmente o “outline”, ou seja, as dimensões em planta do bloco, acima do nível do terreno, é definido pela Engenharia Mecânica. Esta também deve fornecer as cargas estáticas e dinâmicas correspondentes à operação normal e em condição de acidente (por exemplo, cargas de curto-circuito), produzidas pelo equipamento.



O C.G. (centro de gravidade) do conjunto máquina-fundação deve estar próximo do centróide da base (uma tolerância máxima de 5% de excentricidade com relação à dimensão correspondente é recomendada).

Existem recomendações de, para se evitar a condição de ressonância, atender-se aos seguintes limites para  $\beta$  ( $\beta = \omega/\omega_n$ , frequência excitante/ frequência própria):

$\beta \leq 0,5$  ou  $\beta \geq 2$  (instalações principais)

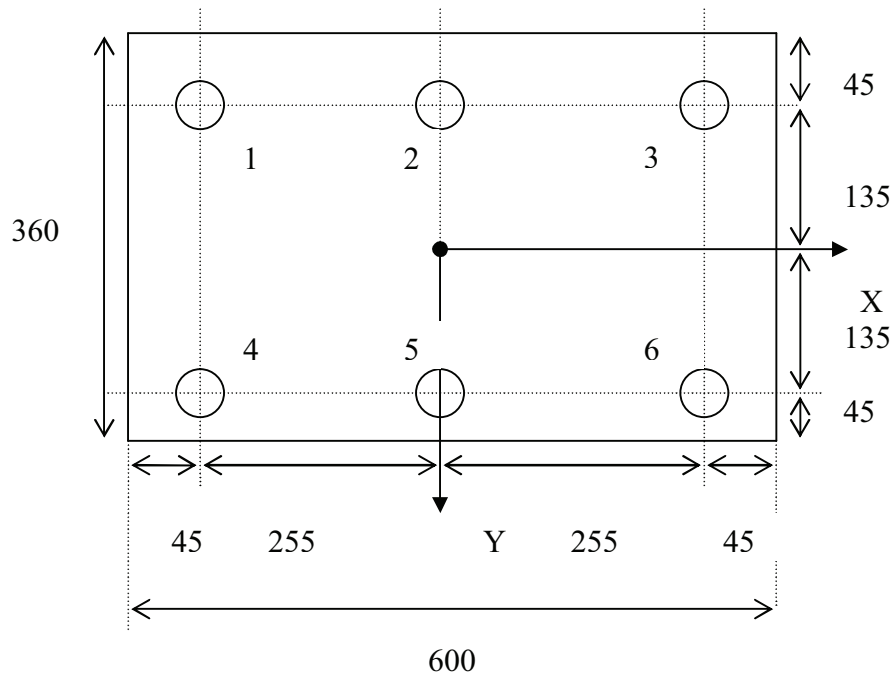
$\beta \leq 0,6$  ou  $\beta \geq 1,5$  (instalações secundárias)

$\beta \geq 3$  (máquinas com anti-vibradores)

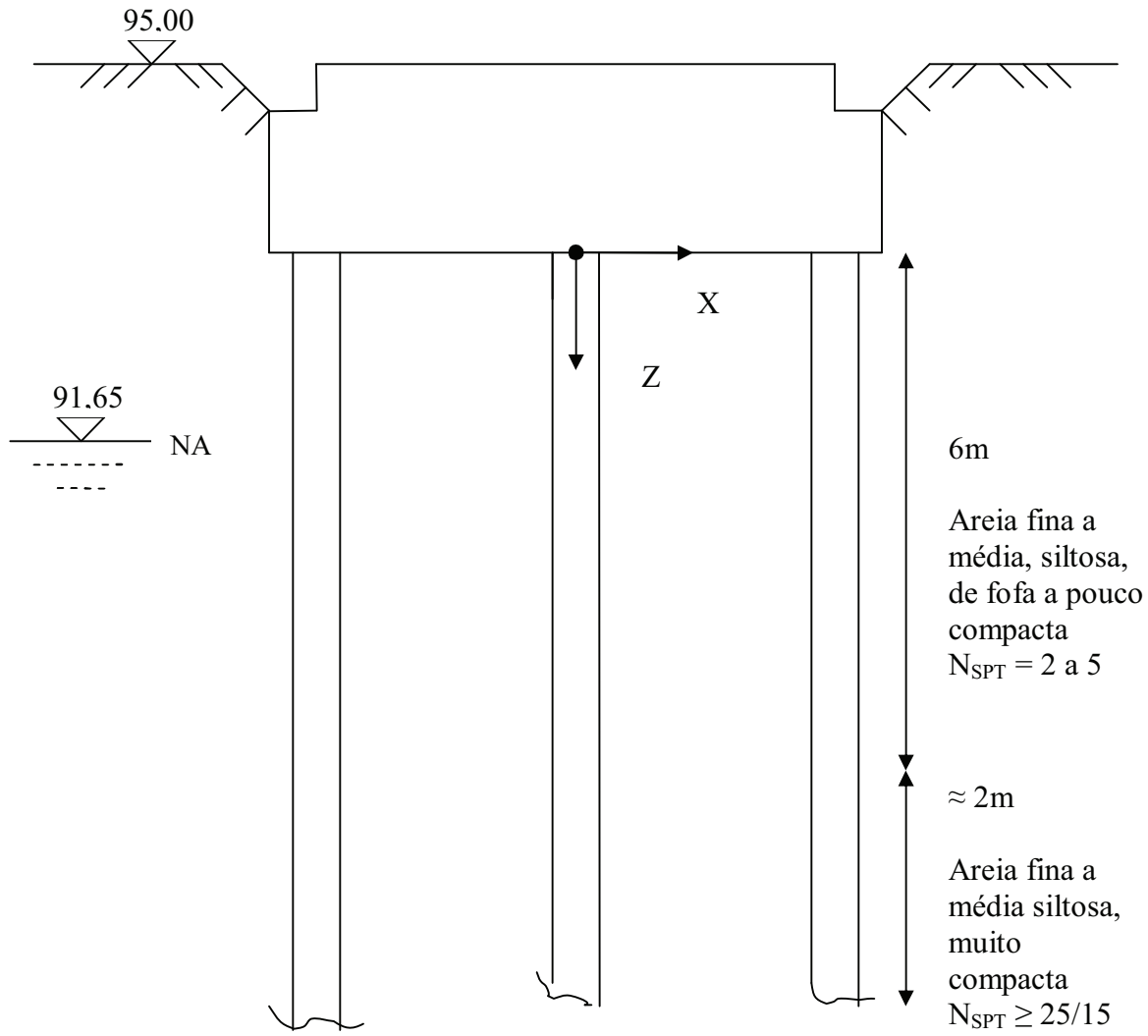
#### 4.6 Exemplos de projeto

- Fundação em bloco sobre estacas

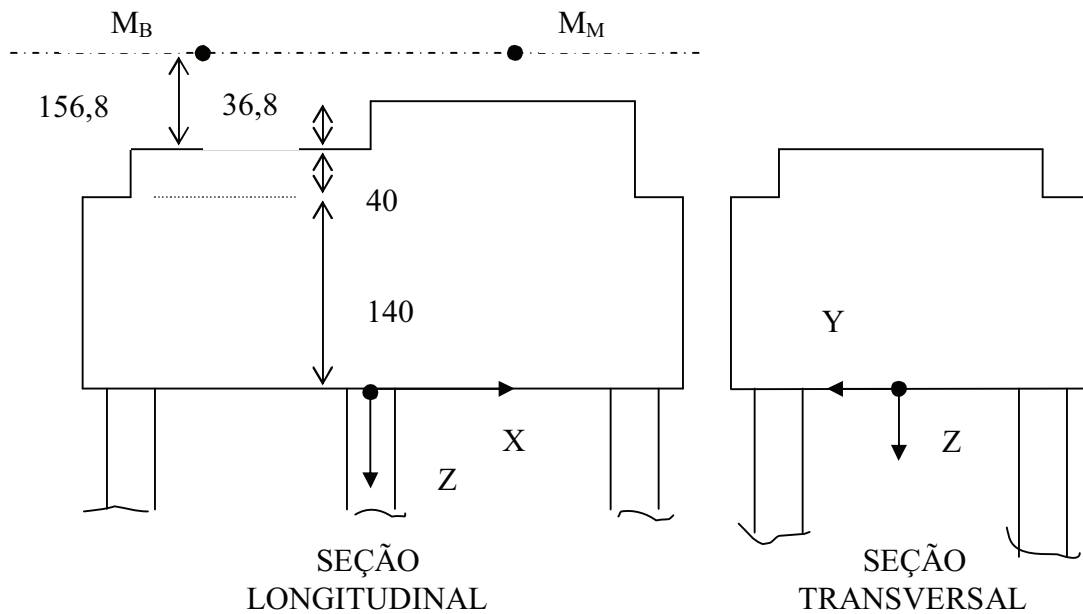
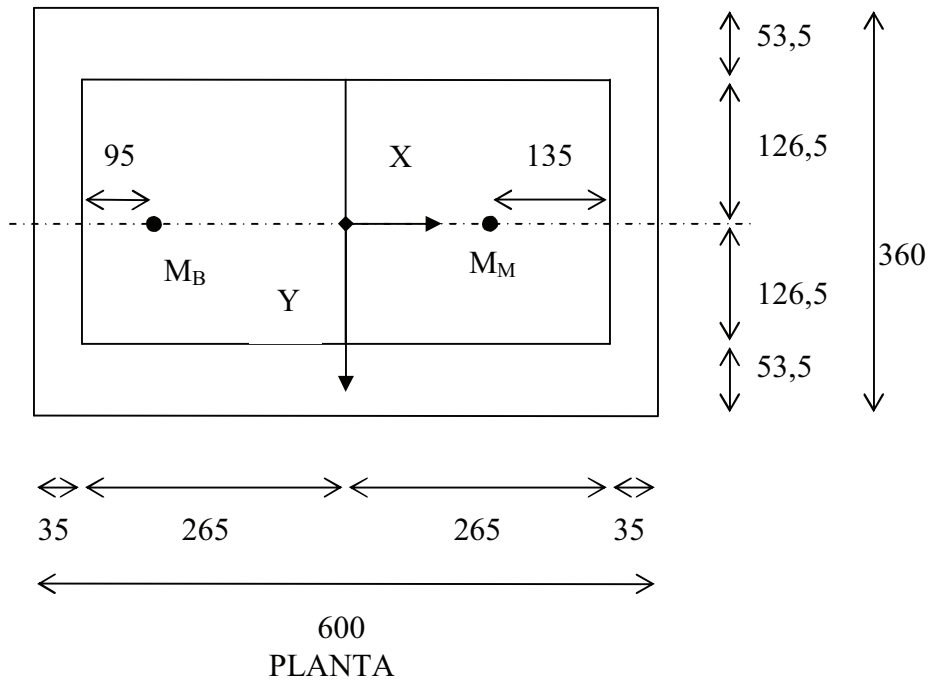
Seja a fundação esquematizada a seguir. Verificar se os deslocamentos verticais e horizontais são admissíveis pela ISO 2372.



ESTAQUEAMENTO



6 estacas raiz, com diâmetro de 30 cm  
 $(r = 0,15 \text{ m}; a = 0,0707\text{m}^2; I = \pi \cdot r^4/4 = 0,0004\text{m}^4)$   
 Propriedades consideradas para o solo:  
 $\nu = 0,30$   
 $\rho = 1,8 \text{ Mg/ m}^3$   
 Primeira camada:  $e = 0,8$   
 Segunda camada:  $e = 0,4$   
 Massa da bomba e do motor:  
 $M_B = 8,27 \text{ t}; M_M = 11,70 \text{ t}$   
 Frequência de operação:  $710 \text{ rpm} = 11,83 \text{ Hz}$



- Avaliação da faixa de variação do módulo de deformação transversal do solo ( $G$ ), nas duas camadas de solo.

Primeira avaliação, diretamente pelo SPT:

$$G = 11,5 (N_{SPT})^{0,8} \quad (G \text{ em MPa}) \quad (\text{Ohsaki e Iwasaki, 1973})$$

Primeira camada:  $G = 20$  a  $42$  MPa

Para a segunda camada, a expressão não será aplicável.

Para a determinação analítica do  $G$ , será empregada a expressão:

$$G = 218 \sigma_m^{1/2} (2,17 - e)^2 / (1+e) \quad (G \text{ e } \sigma_m \text{ em MPa})$$

No caso da fundação sobre estacas, não serão consideradas as tensões devidas ao peso da fundação e do equipamento.

Serão considerados os valores  $e = 0,8$  ou  $0,4$  e  $\rho = 1,8 \text{ t/m}^3$



A 2,00m de profundidade (aproximadamente o topo das estacas), temos:

$$\sigma_{VS} = 18 \cdot 2,00 = 36 \text{ kPa} = 0,036 \text{ MPa}$$

$$G = 218 \cdot 0,036^{1/2} \cdot (2,17 - 0,8)^2 / (1+0,8) = 43 \text{ MPa} \quad (V_S = 155 \text{ m/s})$$

A 8,00m de profundidade (interface entre as camadas), temos:

$$\sigma_{VS} = 18 \cdot 3,35 + 8 \cdot 4,65 = 97,5 \text{ kPa} = 0,0975 \text{ MPa}$$

$$G = 218 \cdot 0,0975^{1/2} \cdot (2,17 - 0,8)^2 / (1+0,8) = 71 \text{ MPa} \quad (V_S = 199 \text{ m/s})$$

A 10,00m de profundidade (aproximadamente a ponta das estacas), temos:

$$\sigma_{VS} = 18 \cdot 3,35 + 8 \cdot 6,65 = 114 \text{ kPa} = 0,114 \text{ MPa}$$

$$G = 218 \cdot 0,114^{1/2} \cdot (2,17 - 0,4)^2 / (1+0,4) = 165 \text{ MPa} \quad (V_S = 302 \text{ m/s})$$

- Avaliação dos coeficientes de rigidez  $K_{WW}$  e  $K_{UU}$ , nas direções vertical e horizontal (com rotação nula), das estacas consideradas como isoladas

Os coeficientes são avaliados através de um processamento do programa PILAY, apresentado na folha seguinte. São usadas, para efeito deste exemplo, propriedades “médias” para as camadas. Os resultados mais relevantes para a análise são:

$$K_{WW} = 0.52031E+06 \quad C_{WW} = 0.86111E+03$$

$$K_{UU} = 0.12771E+06 \quad C_{UU} = 0.30065E+03$$

Rigidez da estaca isolada, no sentido horizontal, pelo Poulos:

Adota-se para  $E_S$  o valor  $E_S = 180 \text{ MPa}$

$$K_R = \frac{E_P I_P}{E_S L^4} = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 0,0004}{1,8 \cdot 10^5 \cdot 8^4} = 1,63 \cdot 10^{-5} \quad (\text{para } L/D = 27, I_{PF} \approx 10)$$

$$K_H = \frac{E_S L}{I_{PF}} = 1,44 \cdot 10^5 \text{ kN/m}$$

Rigidez da estaca isolada, no sentido vertical, pelo Poulos:

$$K = \frac{E_P}{E_S} = \frac{3 \cdot 10^7}{1,8 \cdot 10^5} = 167 \quad (\text{para } L/D = 27, I_P \approx 3,2, I \approx 0,50)$$

$$K_V = \frac{E_S L}{I_P} = 4,50 \cdot 10^5 \text{ kN/m} \quad (\text{como estaca de atrito}):$$

$$K_V = \frac{E_P A_P}{I \cdot L} = 5,30 \cdot 10^5 \text{ kN/m} \quad (\text{como estaca de ponta})$$

- Avaliação dos coeficientes de rigidez global  $K_{GRUPO}$ , nas direções vertical e horizontal, das estacas consideradas em grupo

No sentido horizontal (para forças aplicadas na direção Y)

Coeficientes de interação ( $\alpha_{HH}$ ) para  $K_R = 10^{-5}$

Estacas	d/s	$\beta$	L/D	$\alpha_{HH}$
1-2	0,12	90°	27	0,09
1-3	0,06	90°	27	0,05
1-4	0,11	0°	27	0,16
1-5	0,08	43°	27	0,10
1-6	0,05	62°	27	0,05

-----  
INPUT DATA PROBLEM NO. 1  
-----

NE= 2 TL= 8.00 VST= 302.000

EP= 0.3000E+08 PST= 0.0000E+00 GMP= 25.00 GAC= 10.00 PRP= 0.25 SHFC= 1.334

LAYER TH(I) VS(I) GMS(I) PR(I) TDL(I) RO(I) PAR(I) PIN(I) PTJ(I)

1 6.00 177.00 18.00 0.300 0.100 0.150 0.7070E-01 0.4000E-03 0.8000E-03

2 2.00 302.00 18.00 0.300 0.100 0.150 0.7070E-01 0.4000E-03 0.8000E-03

SOIL BELOW TIP 302.00 18.00 0.300 0.100

DIMENSIONLESS RATIOS

VST/VC= 0.0872 VB/VST= 1.0000 SQRT GT/EP= 0.0740 TL/RO= 53.33

-----  
OUTPUT DATA PROBLEM NO. 1 FREQUENCY NO. 1 OMG= 74.000 AOT=  
0.0368

STIFFNESS AND DAMPING PARAMETERS

PINNED

FW1	FT1	FU1	FP1	FC1	FN1	
0.36797E-01	0.18764E+00	0.35918E-01	0.40805E+00	-0.82538E-01	0.19281E-01	

FW2	FT2	FU2	FP2	FC2	FN2	
0.12261E+00	0.89558E-01	0.17024E+00	0.58488E+00	-0.25147E+00	0.92358E-01	

STIFFNESS AND DAMPING CONSTANTS K1 C1

PINNED

KWW	KZT	KUU	KPP	KPU	KUN	
0.52031E+06	0.12009E+05	0.12771E+06	0.32644E+05	-0.44020E+05	0.68555E+05	

CWW	CZT	CUU	CPP	CPU	CUN	
0.86111E+03	0.28469E+01	0.30065E+03	0.23240E+02	-0.66614E+02	0.16310E+03	

FN1 FN2 KUN CUN FOR PINNED HEAD. OTHER PARAMETERS AND  
CONSTANTS = 0.0

Matriz dos coeficientes adimensionais de flexibilidade global:

$$f1 := \begin{pmatrix} 1.00 & 0.09 & 0.05 & 0.16 & 0.10 & 0.05 \\ 0.09 & 1.00 & 0.09 & 0.10 & 0.16 & 0.10 \\ 0.05 & 0.09 & 1.00 & 0.05 & 0.10 & 0.16 \\ 0.16 & 0.10 & 0.05 & 1.00 & 0.09 & 0.05 \\ 0.10 & 0.16 & 0.10 & 0.09 & 1.00 & 0.09 \\ 0.05 & 0.10 & 0.16 & 0.05 & 0.09 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Matriz dos coeficientes adimensionais de rigidez global:

$$k1 = \begin{pmatrix} 1.04 & -0.06 & -0.03 & -0.15 & -0.08 & -0.03 \\ -0.06 & 1.05 & -0.06 & -0.08 & -0.14 & -0.08 \\ -0.03 & -0.06 & 1.04 & -0.03 & -0.08 & -0.15 \\ -0.15 & -0.08 & -0.03 & 1.04 & -0.06 & -0.03 \\ -0.08 & -0.14 & -0.08 & -0.06 & 1.05 & -0.06 \\ -0.03 & -0.08 & -0.15 & -0.03 & -0.06 & 1.04 \end{pmatrix}$$

Para cada estaca:

Estacas 1, 3, 4 e 6:  $K_{CH} = K_H (1,04 - 0,06 - 0,03 - 0,15 - 0,08 - 0,03) = 0,69 K_H$

Estacas 2 e 5:  $K_{CH} = K_H (-0,06 + 1,05 - 0,06 - 0,08 - 0,14 - 0,08) = 0,63 K_H$

Para efeito deste exemplo, é considerado um fator de redução médio, no sentido horizontal, igual a 0,67 (simplificadamente igual para os dois sentidos X e Y). É desprezada a redução no sentido vertical (coeficientes  $\alpha$  sempre inferiores a 0,1):

$K_{WW} = 520310 \quad \text{kN/m}$

$C_{WW} = 861 \quad \text{kN.s/m}$

$K_{UU} = 0,67 \cdot 127710 = 85566 \quad \text{kN/m}$

$C_{UU} = 0,67 \cdot 300,7 = 201 \quad \text{kN.s/m}$

- Coeficientes de rigidez condensados no CG do topo das estacas

1. Sentidos horizontais X e Y

$K_{11} = K_{22} = 6 \cdot 85566 = 513396 \text{ kN/m}$

$C_{11} = C_{22} = 6 \cdot 201 = 1206 \text{ kN.s/m}$

2. Sentido vertical Z

$K_{33} = 6 \cdot 520310 = 3121860 \text{ kN/m}$

$C_{33} = 6 \cdot 861 = 5166 \text{ kN.s/m}$

3. Sentido rotacional XX

$K_{44} = 6 \cdot 520310 \cdot 1,35^2 = 5689590 \text{ kN.m}$

$C_{44} = 6 \cdot 861 \cdot 1,35^2 = 9415 \text{ kN.s.m}$

4. Sentido rotacional YY

$$K_{55} = 4 \cdot 520310 \cdot 2,55^2 = 13533263 \text{ kN.m}$$

$$C_{55} = 4 \cdot 861 \cdot 2,55^2 = 22395 \text{ kN.s.m}$$

5. Sentido torsional ZZ

$$K_{66} = 85566 \cdot (6 \cdot 1,35^2 + 4 \cdot 2,55^2) = 3161236 \text{ kN.m}$$

$$C_{66} = 201 \cdot (6 \cdot 1,35^2 + 4 \cdot 2,55^2) = 7426 \text{ kN.s.m}$$

- Avaliação das amplitudes dos deslocamentos

Considera-se forças dinâmicas iguais a 20% do peso dos equipamentos, numa frequência de 710 rpm (11,83 Hz).

$$F_B = 0,2 \cdot 82,7 = 16,54 \text{ kN}; F_M = 0,2 \cdot 117 = 23,4 \text{ kN}; F = 39,94 \text{ kN}$$

1. No sentido vertical:

Massa total do sistema:

$$M = [6,00 \cdot 3,60 \cdot 1,40 + 2,65 \cdot 2,53 \cdot (0,40 + 0,768)] \cdot 2,5 + 8,27 + 11,7 = 115,1 \text{ t}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 710/60 = 74,35 \text{ rad/s} \quad f = 26,21 \text{ Hz}$$

• Desprezando o amortecimento:

$$\text{Amplit:} = \frac{F}{K - \omega^2 M}$$

$$\delta_v = 16.069$$

• Considerando o amortecimento:

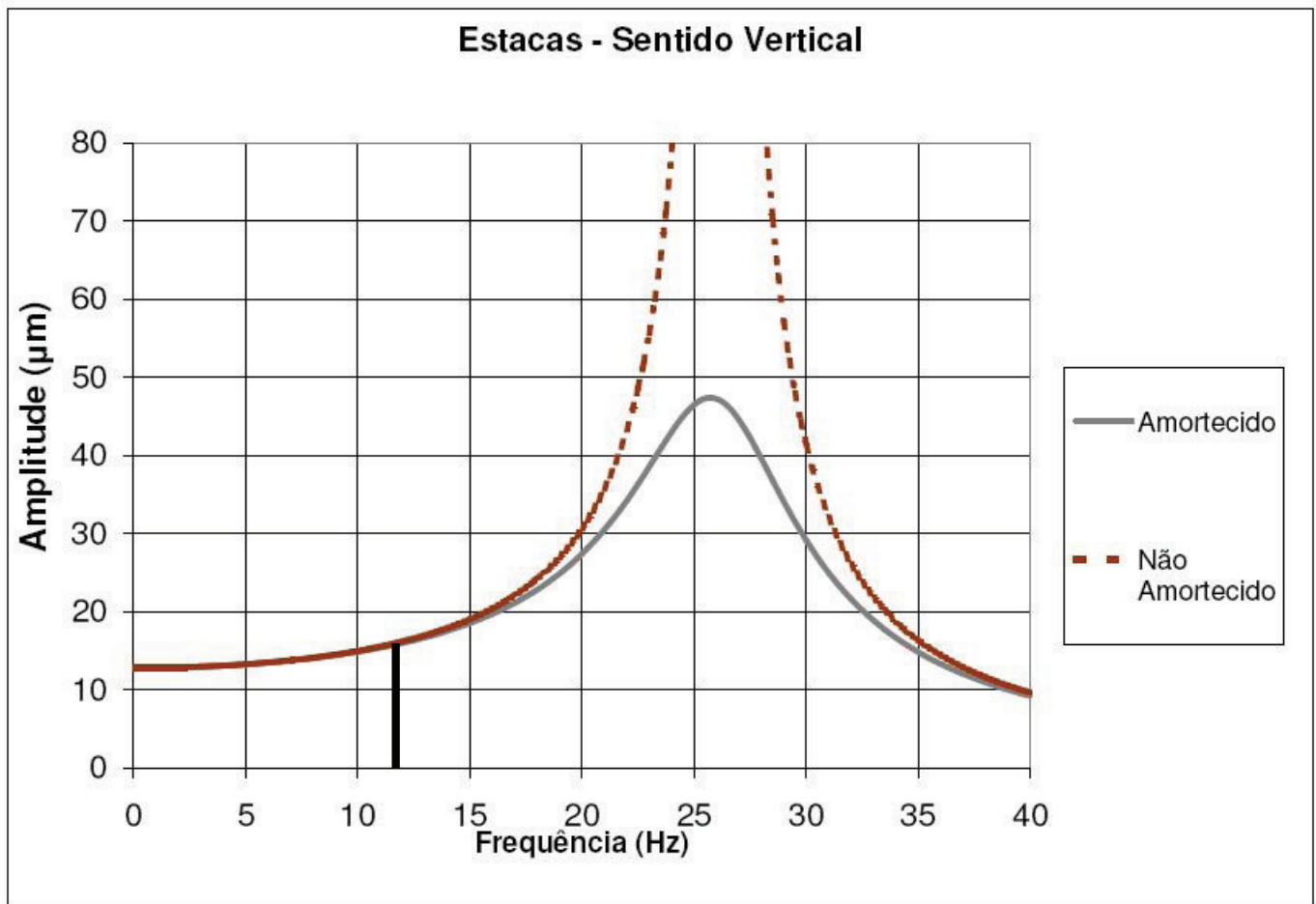
$$\text{Amplit:} = \frac{F}{K + i\omega \cdot C - \omega^2 M}$$

$$\delta_{v0} = 15.698 - 2.428i$$

O módulo do deslocamento será de:

$$\delta_v = 15.885$$

(Faixa ótima para uma máquina pesada)



2. No sentido horizontal:

As propriedades de massa de rotação são avaliadas na planilha abaixo:

Volume	a	b	c	Massa	Zcg	M.Zcg	M.(Z-Zcg)^2	Mxx
1	3,600	6,000	1,400	75,600	0,700	52,920	30,580	93,996
2	2,530	2,650	0,400	6,705	1,600	10,727	0,467	3,666
3	2,530	2,650	0,768	12,873	1,784	22,965	2,584	7,500
Mb + Mm	0,000	0,000	0,000	19,970	3,368	67,259	82,457	0,000
Soma				115,147		153,871	116,087	105,162
					ZCG=	1,336		221,249

$$\left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J_{XX} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_Y & -K_Y h \\ -K_Y h & (K_{XX} + K_Y h^2) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_Y \\ u_{XX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix}$$

$\omega = 74,35 \text{ rad/s}$  ;  $M = 115,1\text{t}$ ;  $J_{XX} = 221,25 \text{ t.m}^2$ ;  
 $K_Y = 513396 \text{ kN/m}$  ;  $K_{XX} = 5689590 \text{ kN.m}$

$$P = 39,94 \text{ kN}; M = (3,368-1,336) \cdot P = 81,16 \text{ kN.m}$$

- Desprezando o amortecimento:

$$u = \begin{pmatrix} -2.056 \times 10^{-4} & -9.65 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Que tem como módulo

$$u = 205,8 \text{ } \mu\text{m}$$

Os picos correspondem às frequências próprias de 9,4 Hz e 27,0 Hz.

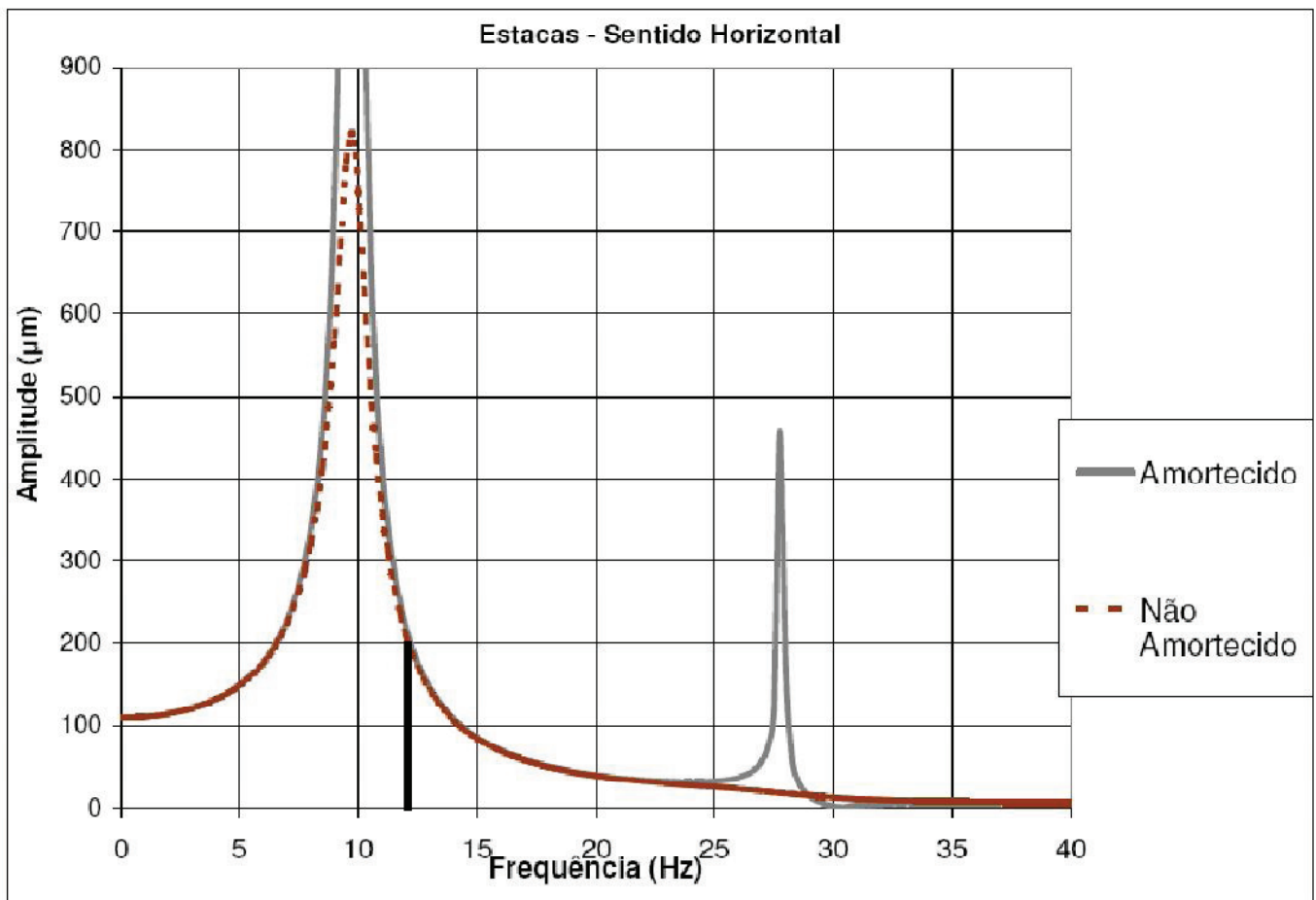
- Considerando o amortecimento:

$$u(11.833) = -1.886 \times 10^{-4} - 5.736i \times 10^{-5}$$

Que tem como módulo

$$u = 197,1 \text{ } \mu\text{m}$$

(Faixa tolerável para uma máquina pesada)



- Fundação direta em bloco

É analisado o mesmo bloco do exemplo anterior, agora em fundação direta.

$$K_z = \frac{G}{1-\nu} \cdot \beta_z \cdot \sqrt{4 \cdot c \cdot d}$$

$$2c = 6,00\text{m} ; 2d = 3,60\text{m}$$

Adota-se  $G = 50\text{MPa}$  e  $\beta_z = 2,2$

$$K_z = 730334 \text{ kN/m}$$

Raio equivalente para cálculo do coeficiente de amortecimento:

$$r = (4cd/\pi)^{1/2} \quad r = 2,62\text{m}$$

Coeficiente de amortecimento  $C_z$ :

$$C_z = \frac{3,4 \cdot r^2}{1-\nu} \sqrt{\rho \cdot G}$$

$$C_z = 10019 \text{ kN.s/m}$$

Desprezando o amortecimento:

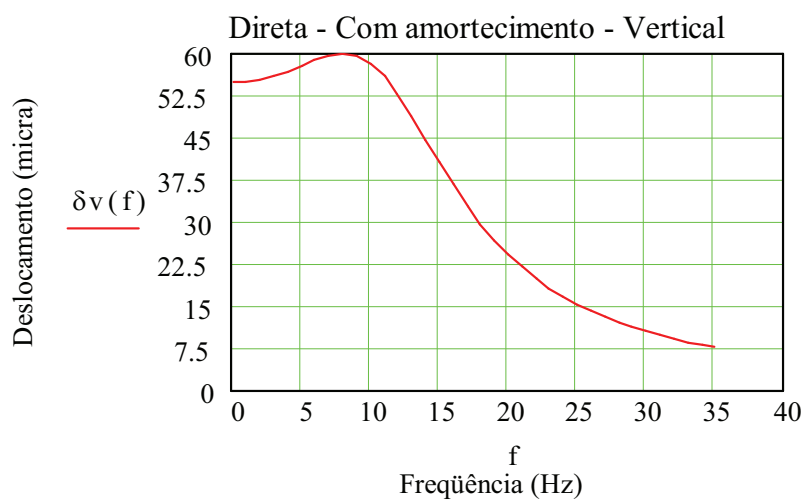
$$\delta_v = 428.5$$

Considerando o amortecimento, o módulo do deslocamento será de:

$$\delta_v = 53.167$$

(Faixa aceitável para um turbo-gerador)

Variação do deslocamento vertical com a frequência do carregamento:



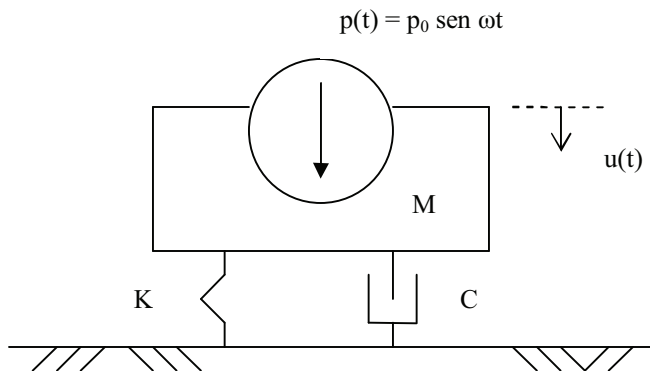
## 5. ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES

### 5.1 Isolamento Ativo e Passivo. Isolamento à Distância. Isolamento por Barreiras

O isolamento ativo corresponde à situação em que se deve evitar que o equipamento transmita para o meio ambiente um nível inadmissível de vibrações.

No isolamento passivo, um equipamento sensível deve ser protegido contra vibrações que estão sendo produzidas externamente.

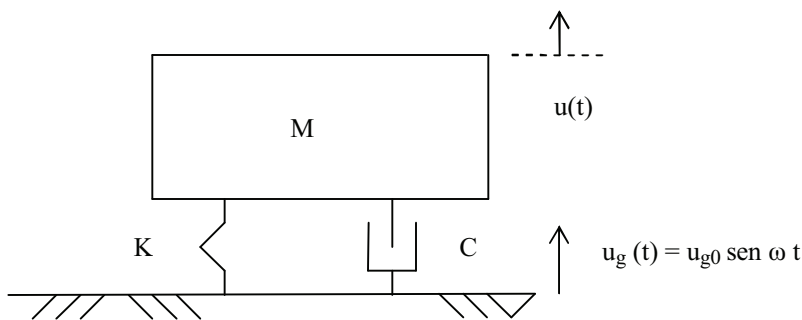
- Transmissibilidade no isolamento ativo:



$T_r$  é relação entre a força transmitida à base e a força aplicada.

$$T_r = \frac{f_{\text{MAX}}}{P_0} = \frac{[1 + (2\beta\epsilon)^2]^{1/2}}{[(1 - \beta^2)^2 + (2\beta\epsilon)^2]^{1/2}} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

- Transmissibilidade no isolamento passivo:

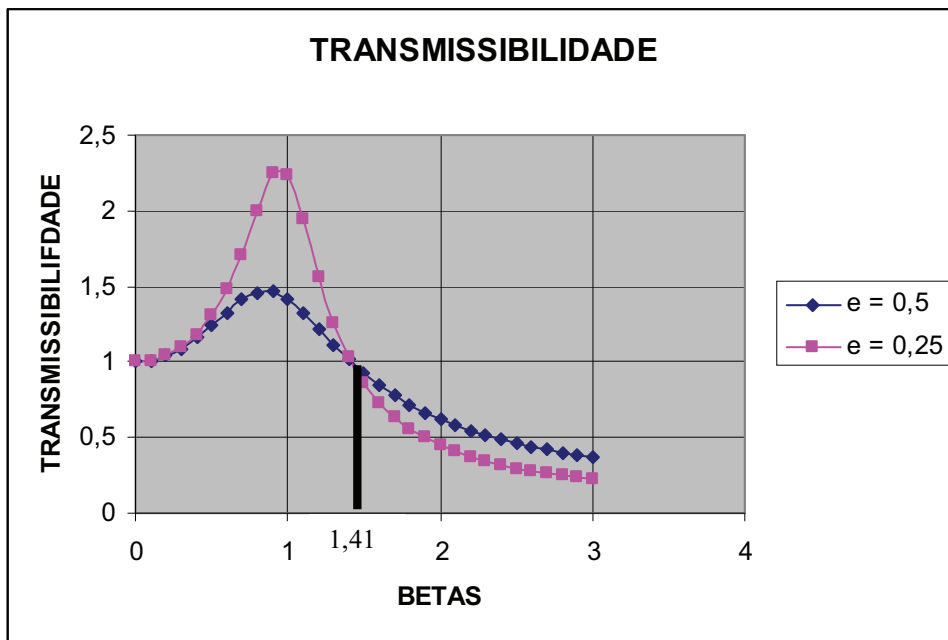


$T_r$  é relação entre deslocamentos (ou acelerações) absolutas da massa e deslocamentos (ou acelerações) impostos ao apoio.

$$T_r = \frac{u_{\text{MAX,ABS}}}{u_{\text{MAX,APOIO}}} = \frac{[1 + (2\beta\epsilon)^2]^{1/2}}{[(1 - \beta^2)^2 + (2\beta\epsilon)^2]^{1/2}} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$



A mesma expressão se aplica para os dois casos. Observar no exemplo abaixo que para  $\beta > 1,41$ , o isolamento é eficiente e que a transmissibilidade aumenta com o amortecimento.



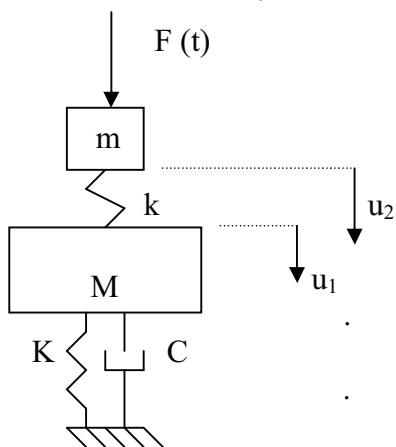
Expressando de outra forma a “transmissibilidade”, na ausência de amortecimento:

$$\beta^2 - 1 = \frac{1}{T}; \beta^2 = \frac{T+1}{T}; \frac{W}{K} = \frac{0,25 \cdot (2\pi)^2 \cdot \varpi^2}{\omega^2} \cdot \frac{\varpi^2}{\omega^2}$$

O que leva à expressão aproximada:

$$\delta_{EST} = \frac{0,25}{f_{APLIC}^2} \cdot \frac{(T+1)}{T} \quad f_{APLIC} = \varpi / 2\pi$$

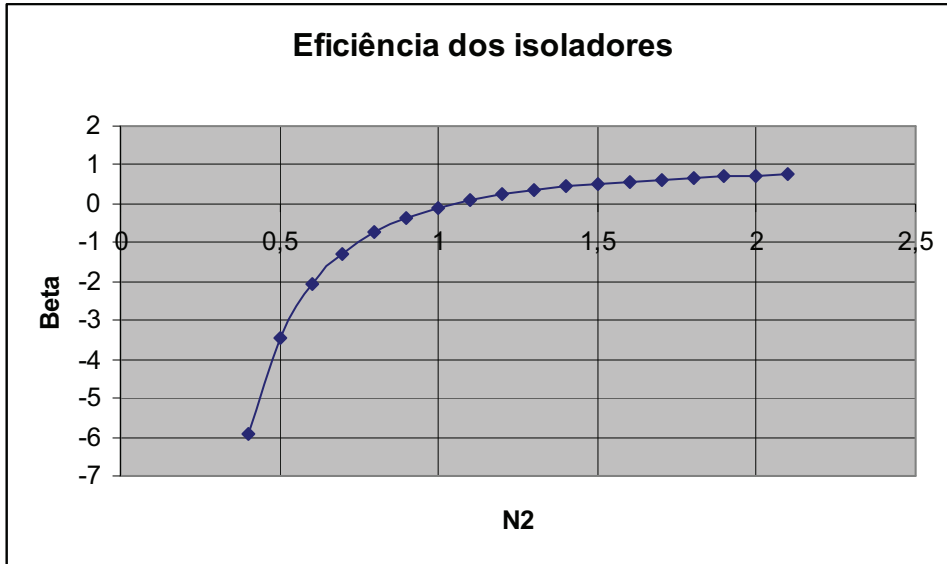
Em uma outra formulação, usando o exemplo do item 1.4.1,



$$n_2^2 = \frac{1 - (1 + \alpha) \cdot n_1^2}{(1 + \alpha) \cdot (\beta - 1) \cdot (n_1^2 - 1)}$$

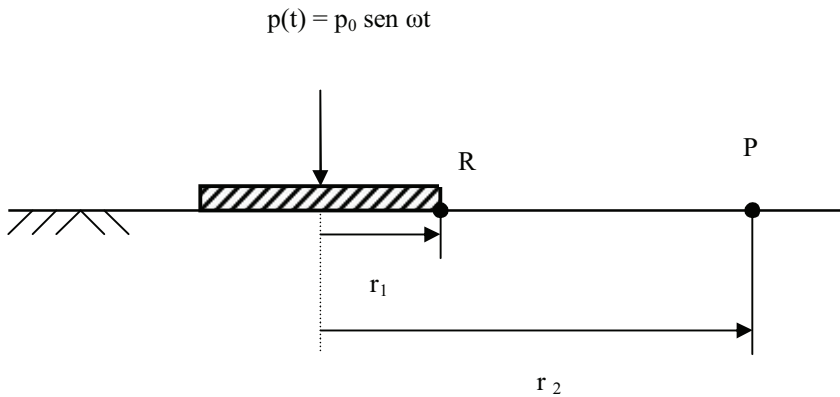
$$\alpha = m/M; n_1 = \omega_1 / \varpi; \omega_1^2 = K / (M+m); n_2 = \omega_2 / \varpi; \omega_2^2 = k/m.$$

$\beta = u_2 / u_0$  (relação que ocorreria sem/com a mola  $k$  com a amplitude em M); a eficiência se dá somente para  $\beta \leq -1$ . Na figura abaixo,  $\alpha = 0,5$  e  $n_1 = 2$



- Isolamento à distância

Pode-se atender à condição de isolamento passivo pela redução das vibrações à distância.



A amplitude das vibrações verticais no ponto P pode ser avaliada considerando-se a expressão abaixo, de atenuação das ondas de Rayleigh, que na superfície, são as mais lentamente amortecidas.

$$u_p = u_R \cdot \sqrt{r_1 / r_2} \cdot e^{-\alpha(r_2 - r_1)}$$

(amortecimento de radiação).(amortecimento do material)

Valores de  $\alpha$ :

$\alpha = 0,04$  a  $0,12 \text{ m}^{-1}$  (em solos secos é maior o  $\alpha$ )

$\alpha = 0,04$  é típico de solos saturados e solos fofos;

$\alpha = 0,06$  é típico de solos parcialmente saturados e solos médios;

$\alpha = 0,10$  é típico de solos densos

- Isolamento por barreiras

A eficiência de barreiras (usando bentonita, isopor, etc.) depende essencialmente da sua capacidade de interceptar as ondas de Rayleigh. A profundidade a ser atingida deve ser da ordem do comprimento de onda das ondas R, o que teoricamente elimina cerca de 98% da energia incidente. A prática tem indicado que uma redução de cerca de 90% das amplitudes de vibração podem ser conseguidas com uma profundidade de trincheira da ordem de 1,5 vezes o comprimento de onda de Rayleigh.

O comprimento de onda é maior quanto menor a frequência de excitação. (é melhor o isolamento em altas frequências):

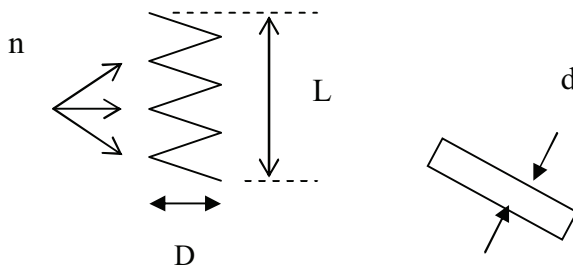
$$L = V_R \cdot T$$

Considerando uma velocidade típica para as ondas de Rayleigh de 50 a 250 m/s e uma faixa de frequências de 5 a 50 Hz, o comprimento das ondas de Rayleigh variará tipicamente entre 5 e 15 m.

## 5.2 Propriedades dos Materiais Isolantes. Dispositivos Mecânicos Comerciais.

### 5.2.1 Isolamento com molas

Propriedades do aço –  $E = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ;  $G = 8,4 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ;  $\nu = 0,25$



Rigidez vertical de uma mola:  $K_v = \frac{1}{n} \frac{G d^4}{8 D^3}$

Carga vertical admissível:  $P = \frac{\tau \pi d^3}{8 \alpha D}$

$\tau = 400.000 \text{ kN/m}^2$  (tensão admissível do aço no cisalhamento)

$$\alpha = 1 + 1,25 \frac{d}{D} + 0,875 \frac{d^2}{D^2} + \frac{d^3}{D^3}$$

Rigidez horizontal, expressa em função da vertical:

$$K_H = K_v \frac{1}{0,385 \cdot \alpha \cdot [1 + 0,77 \cdot (h/D)^2]}$$

Onde  $h = L - \delta_z$

$\delta_z$  é o deslocamento vertical da mola sob a ação da carga de trabalho (P)

### 5.2.2 Outros materiais isolantes

Pode-se utilizar: madeira, cortiça, feltro, borracha.

Isoladores industrializados: metálicos (Vibtech, colchões de ar, tapetes ranhurados, etc.)

- Exemplo numérico - Isolamento das vibrações

Para os dois casos estudados no item 4.6, verificar a possibilidade de projetar um isolamento entre as máquinas e o bloco, com isoladores metálicos da VIBTECH ou similar que reduzam as vibrações para 20% das obtidas sem isolamento.

Fundação em estacas:

Usando um VIBTECH V1135 (24X), com frequência própria de 5 Hz:

$$\alpha = 19,97 / 95,177 = 0,21$$

$$\omega_2^2 = 19130 / 19,97 = 958 \quad \omega_2 = 30,95 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 74,4 \text{ rad/s}; n_2 = 0,415$$

$$\omega_1^2 = 3121860 / 114,6 = 27241 \quad \omega_1 = 165,0 \text{ rad/s}; n_1 = 2,22$$

$$n_2^2 = \frac{1 - (1 + \alpha) n_1^2}{(1 + \alpha)(\beta - 1)(n_1^2 - 1)} \quad 0,415^2 = \frac{1 - (1 + 0,21) \cdot 2,22^2}{(1 + 0,21) \cdot (\beta - 1)(2,22^2 - 1)}$$

$$n_2^2 = \frac{1 - (1 + \alpha) \cdot n_1^2}{(1 + \alpha) \cdot (\beta - 1) \cdot (n_1^2 - 1)} \quad 0,415^2 = \frac{1 - (1 + 0,21) \cdot 2,22^2}{(1 + 0,21) \cdot (\beta - 1) \cdot (2,22^2 - 1)}$$

$$\beta = -5,063 \text{ (OK)}$$

Fundação direta:

Usando um VIBTECH V1134 (20X), com frequência própria de 7 Hz:

$$\omega_2^2 = 38631 / 19,97 = 1934 \quad \omega_2 = 43,98 \text{ rad/s}; n_2 = 0,591$$

$$\omega_1^2 = 730334 / 114,6 = 6373 \quad \omega_1 = 79,83 \text{ rad/s}; n_1 = 1,07$$

$$n_2^2 = \frac{1 - (1 + \alpha) \cdot n_1^2}{(1 + \alpha) \cdot (\beta - 1) \cdot (n_1^2 - 1)} \quad 0,591^2 = \frac{1 - (1 + 0,21) \cdot 1,07^2}{(1 + 0,21) \cdot (\beta - 1) \cdot (1,07^2 - 1)}$$

$$\beta = -5,29 \text{ (OK)}$$

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] - Clough, R.W. e Penzien, J., Dynamics of Structures, Second Edition.
- [2] - Paz., M., Structural Dynamics - Theory and Computation – 4<sup>th</sup> Edition.
- [3] - Chopra, A. K., Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering
- [4] - Richart, F.E., Woods, R.D. e Hall Jr., J.R., Vibrations of Soils and Foundations, 1970
- [5] - Major, A. , Dynamics in Civil Engineering – Analysis and Design – Vols. I a IV
- [6] - Srinivasalu, P., Vaidyanathan, C.V. – Handbook of Machine Foundations
- [7] - ABMS/ ABEF, Fundações – Teoria e Prática – Editora Pini
- [8] - Carvalho, L. J., Análise de Fundações de Máquinas, Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal Fluminense (UFF), 1988.
- [9] - Gazetas, G., Dobry, R., Tassoulas, J.L., Vertical Response of Arbitrarily Shaped Embedded Foundations, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 111, No. 6, Junho 1985.
- [10] - Gazetas, G., Tassoulas, J. L., Horizontal Stiffness of Arbitrarily Shaped Embedded Foundations, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 113, No. 5, Maio 1987.
- [11] - Hatzikonstantinou, E., Tassoulas, J. L., Gazetas, G. et al., Rocking Stiffness of Arbitrarily Shaped Embedded Foundations, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 115, No. 4, Abril 1989.
- [12] - Novak, M., Aboul-Ella, F., PILAY – A Computer Program for Calculation of Stiffness and Damping of Piles in Layered Media, Systems Analysis Control and Design Activity (SACDA), The University of Western Ontario, London, Canada, December 1977.
- [13] - Luco, J. E., Impedance Functions for a Rigid Foundation on o Layered Medium, Nuclear Engineering and Design 31, 1974, 204-217.
- [14] - Poulos, H. G., Davis, E. H., Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics, John Wiley, New York, 1974.
- [15] - Poulos, H. G., Davis, E. H., Pile Foundation Analysis and Design, John Wiley, New York, 1980.
- [16] - ISO 2372 - Mechanical Vibration of Machines with Operation Speeds from 10 to 200 rev/s
- [17] – DIN 4024, Part 1 – Machine foundations – Flexible structures that support machines with rotating elements
- [18] – DIN 4024, Part 2 – Machine foundations – Rigid foundations for machinery subjected to periodic vibration
- [19] - Gazetas, G., Formulas and Charts for Impedances of Surface and Embedded Foundations, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 117, No. 9, September 1991, 1363-1381.
- [20] - Wolf, J.P., Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models, Prentice Hall, 1994.
- [21] - Roesset, J.M. e Angelides, D., Dynamic Stiffness of Piles, in Numerical Methods in Offshore Piling, Institution of Civil Engineers, London, 1980, 75-81.
- [22] - Gazetas, G. et al., Dynamic Interaction Factors for Floating Pile Groups, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 117, No. 10. October 1991, 1531-1548.
- [23] - Gazetas, G., Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1983, Vol. 2, No. 1
- [24] - Souza Lima, S. e Santos, S.H.C., Análise Dinâmica das Estruturas, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2008.
- [25] - American Concrete Institute, Foundations for Dynamic Equipment, ACI 351.3R-04, 2004.
- [26] - Bhatia, K. G., Foundations for Industrial Machines, D-CAD Publishers, New Delhi, 2008